Thermodynamique

Diffusion thermique

Loi de Fourier

On définit le **flux thermique** Φ à travers une surface S par

$$\boxed{\delta Q = \Phi\,\mathrm{d}t},$$

où δQ est le transfert thermique non convectif traversant S pendant le temps $\mathrm{d}t$.

- Le flux thermique Φ est une grandeur algébrique ; c'est une puissance, qui s'exprime en watts.

Le **vecteur densité de courant thermique** $\vec{j}_{\text{th}}$ est défini par

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}.$$

- Si la surface S est fermée, le flux thermique est positif s'il est sortant.
- La puissance thermique traversant une surface S s'écrit $\Phi = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
- $\|\vec{j}_{\text{th}}\|$ s'exprime en $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

La **loi de Fourier** s'énonce

$$\boxed{\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T},$$

où $\lambda > 0$ (en $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$) est la **conductivité thermique** du matériau. Un matériau bon conducteur de la chaleur est caractérisée par une conductivité thermique λ élevée.

- La loi de Fourier (1815) est *phénoménologique*. Elle est valable si les écarts températures ne sont si trop forts ni trop faibles (réponse linéaire du système à un gradient de température).
- Le signe $-$ rend compte de l'orientation du flux thermique vers les basses températures.
- À une dimension, la loi de Fourier s'écrit $j_{\text{th}} = -\lambda \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}$.
- La diffusion thermique est le mode de transfert de la chaleur caractéristique des solides ; elle existe aussi dans les liquides et les gaz, mais souvent associée à la convection.
- La conduction thermique se fait sans transport macroscopique de matière ; il s'agit d'un transfert d'énergie cinétique microscopique de proche en proche entre les particules. les bons conducteurs de l'électricité sont aussi des bons conducteurs thermiques (les électrons de conduction contribuent à la diffusion thermique).

Équation de la diffusion thermique

Le **bilan d'énergie** à une dimension s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\text{th}}(x,t)}{\partial x} + p_{\text{i}}(x,t)},$$

où ρ est la masse volumique du matériau étudié, $u(x,t)$ son énergie interne massique et p_{i} le taux de production d'énergie interne par unité de temps et par unité de volume.
Si le milieu est incompressible (ρ constante), l'introduction de la loi de Fourier conduit à l'**équation de la diffusion thermique**, ou **équation de la chaleur**,

$$\boxed{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + p_{\text{i}}(x,t)},$$

où $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ est la **diffusivité thermique** du matériau, c étant sa chaleur massique.

- L'équation de la diffusion thermique est une *équation aux dérivées partielles*. Sa solution est unique pour des conditions aux frontières données.
- La non invariance de cette équation par renversement du temps (changement de variable $t \to -t$) traduit l'*irréversibilité* de la conduction thermique.

Régime stationnaire : résistance thermique

Sans terme de production ($p_{\text{i}} = 0$), l'équation de diffusion thermique s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0$.
On a donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \text{cte} = \dfrac{T_2 - T_1}{L} = -\dfrac{j_{\text{th}}}{\lambda} = -\dfrac{\Phi}{\lambda S}$, en notant $T_1 = T(x_1)$, $T_2 = T(x_2)$ et $x_2 - x_1 = L$.

- En régime stationnaire, le flux thermique Φ est constant.

On définit la **résistance thermique** du matériau par $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{T_1 - T_2}{\Phi}}$.

- La résistance thermique d'un cylindre de longueur L et de section S est $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.
- On définit la conductance thermique $G_{\text{th}} = \dfrac{1}{R_{\text{th}}}$.
- Les résistances thermiques en série s'ajoutent ; les conductances thermiques en parallèles s'ajoutent.

Le bilan d'énergie en régime stationnaire appliqué au volume V délimité par la surface S s'écrit sous forme intégrale :

$$0 = -\oiint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \mathrm{d}t \iiint_V p_{\text{i}}\,\mathrm{d}\tau.$$

Analogies : diffusion thermique, diffusion particulaire et conduction électrique

Conduction électrique	**Diffusion thermique**	**Diffusion particulaire**
charge q	transfert thermique Q	densité particulaire n
vecteur densité de courant $\vec{j}$	$\vec{j}_{\text{th}}$	$\vec{j}_n$
intensité électrique $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	flux thermique $\Phi = \iint \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$	flux particulaire $\Phi = \iint \vec{j}_n \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$
loi d'Ohm $\vec{j} = -\gamma\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$	loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T$	loi de Fick $\vec{j}_n = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$
conductivité électrique γ	conductivité thermique λ	diffusivité D
potentiel électrique V	température T	densité particulaire n
résistance électrique R $V_1 - V_2 = RI$ $R = \dfrac{L}{\gamma S}$	résistance thermique R_{th} $T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\Phi$ $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda S}$	

Pour en savoir plus...

Joseph Fourier (1768-1830). Publication de l'ouvrage *Théorie analytique de la chaleur* en 1822. La résolution de l'équation de la chaleur le conduit à définir la représentation en série de Fourier d'une fonction sur un certain domaine.