

# CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

---

## **BASES SCIENTIFIQUES**

**(Lois physiques pour l'électronique, l'électrotechnique,  
l'automatisme)**

**A0**

**Cours 26049**

-----

**Didier LE RUYET**

**Février 2003**

# TABLE DES MATIERES

<b>1</b>	<b>RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction	4
1.2	Matériaux en électricité	4
1.3	Champ électrique et différence de potentiel	4
1.4	Courant électrique	4
1.5	Lois fondamentales	5
1.5.1	Loi des mailles	5
1.5.2	Loi des nœuds	6
1.6	Générateurs idéaux	7
1.6.1	Générateur de tension idéal	7
1.6.2	Générateur de courant idéal	7
<b>2</b>	<b>LES DIPOLES PASSIFS ELEMENTAIRES</b>	<b>8</b>
2.1	Introduction	8
2.2	Caractéristique d'un dipole	8
2.3	Les dipôles passifs élémentaires	8
2.3.1	Résistance	8
2.3.2	Bobine d'induction	9
2.3.3	Condensateur	9
2.4	Lois générales des dipôles passifs	9
2.5	Association de dipôles de même nature	11
2.6	Lois des dipôles en régime sinusoïdal	11
2.7	Diagrammes de Fresnel	12
2.8	Notation complexe et impédance complexe	15
<b>3</b>	<b>PUISSANCE ET ENERGIE</b>	<b>19</b>
3.1	Définitions	19
3.2	Cas particuliers	20
3.2.1	Energie consommée dans une résistance	20
3.2.2	Energie dans une bobine	21
3.2.3	Energie dans un condensateur	22
3.3	Puissance active, réactive et complexe dans un dipole quelconque	24
3.4	Force électromotrice et force contre électromotrice	25
3.4.1	Générateur et force électromotrice	25
3.4.2	Récepteur et force contre électromotrice	26
3.5	Adaptation d'impédance	27
<b>4</b>	<b>METHODES D'ANALYSE DES RESEAUX</b>	<b>30</b>
4.1	Introduction	30
4.2	Méthode des courants des mailles	31
4.3	Théorème de Millman	32
4.4	Théorème de superposition	33
4.5	Théorème de Thévenin et de Norton	35
4.5.1	Grandeurs caractéristiques d'un dipôle	35
4.5.2	Théorème de Thévenin	35
4.5.3	Théorème de Norton	35
4.6	Théorème de Kennely	36
<b>5</b>	<b>FACTEUR DE QUALITE ET CIRCUIT RESONNANT</b>	<b>38</b>
5.1	Oscillations libres dans un circuit LC	38
5.2	Facteur de qualité d'un circuit	39

5.2.1	Définition .....	39
5.2.2	Facteur de qualité d'un élément réactif réel .....	39
5.2.3	Généralisation du facteur de qualité .....	41
5.3	Le circuit résonnant série .....	41
<b>6</b>	<b>LES QUADRIPOLES.....</b>	<b>47</b>
6.1	Définitions .....	47
6.2	Description matricielle du quadripôle .....	47
6.2.1	Matrices impédances .....	47
6.2.2	Matrices admittances .....	52
6.2.3	Matrices hybrides .....	54
6.2.4	Matrice de transfert ou matrice chaîne .....	55
6.3	Schémas équivalents du quadripôle .....	55
6.3.1	Représentation matricielle impédance.....	56
6.3.2	Représentation matricielle admittance .....	56
6.3.3	Représentation matricielle hybride.....	56
6.4	Association de quadripôles .....	56
6.4.1	Association série .....	56
6.4.2	Association parallèle .....	57
6.4.3	Association en cascade.....	58
6.5	Fonctions de transfert d'un quadripôle.....	59
<b>7</b>	<b>FILTRAGE, DIAGRAMMES DE BODE .....</b>	<b>63</b>
7.1	Introduction au filtrage .....	63
7.1.1	Définitions.....	63
7.2	Echelle logarithmique et diagramme de Bode .....	65
7.3	Fonctions de transfert de base .....	67
7.3.1	Intégrateur .....	67
7.3.2	Dérivateur.....	67
7.3.3	Intégrateur réel ou filtre passe bas du premier ordre .....	68
7.3.4	Dérivateur réel.....	70
7.3.5	Filtre passe-haut du premier ordre.....	71
7.3.6	filtre passe bas du second ordre.....	73
7.3.7	Fonctions de transfert quelconques .....	77

# 1 RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE

## 1.1 Introduction

L'électrodynamique étudie la circulation des courants électriques dans les circuits électriques composés d'un ensemble d'éléments appelés composants comme les générateurs (piles, ...), les composants passifs (résistance, bobine d'induction, condensateur) et les composants actifs (transistor, amplificateur opérationnel, ...). Ces éléments sont reliés entre eux par des fils conducteurs.

## 1.2 Matériaux en électricité

Les électrons se déplacent dans les solides plus ou moins facilement selon les matériaux. La charge d'un électron est égale à  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb. On distingue 3 types de matériaux :

- ✓ Les conducteurs : matériaux dans lesquels un champ très faible suffit à fournir une énergie permettant le déplacement des électrons libres (porteurs de charges arrachés à chaque atome). On a un à deux électrons libres en moyenne par atome. La concentration en électrons dépend du matériau ; par exemple pour le cuivre, on a  $10^{28}$  électrons par  $m^3$ .
- ✓ Les isolants : pas d'électron libre. La qualité de l'isolant dépend de la pureté du matériau
- ✓ Les semi-conducteurs : la concentration en électrons dépend du matériau et de la température. Les électrons sont disposés dans des bandes permises séparées par des bandes dites interdites. Une certaine quantité d'énergie permet de faire passer des électrons d'une bande permise pleine (bande de valence) vers la bande vide (bande de conduction) générant ainsi des trous électriquement équivalents à des charges positives dans la bande de valence. Les semi-conducteurs sont utilisés dans la plupart des circuits actifs.

## 1.3 Champ électrique et différence de potentiel

Si on applique une différence de potentiel  $V_{AB} = V_A - V_B$  entre deux points A et B, les charges se déplacent à cause du champ électrique  $\vec{E}$ . Le champ est dirigé vers les potentiels décroissants (potentiel élevé vers potentiel faible). On a la relation :

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Les différences de potentiel s'exprime en volt et le champ électrique  $\|\vec{E}\|$  s'exprime en volt par mètre.

## 1.4 Courant électrique

Le débit de charge ou courant électrique est donné par la relation :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

I s'exprime en ampère.

Les lois du courant électrique ont été étudiées par Ampère ( 1755-1836) au début du 19<sup>ième</sup> siècle.  
Par convention le sens du courant est le sens contraire du déplacement des électrons.

## 1.5 Lois fondamentales

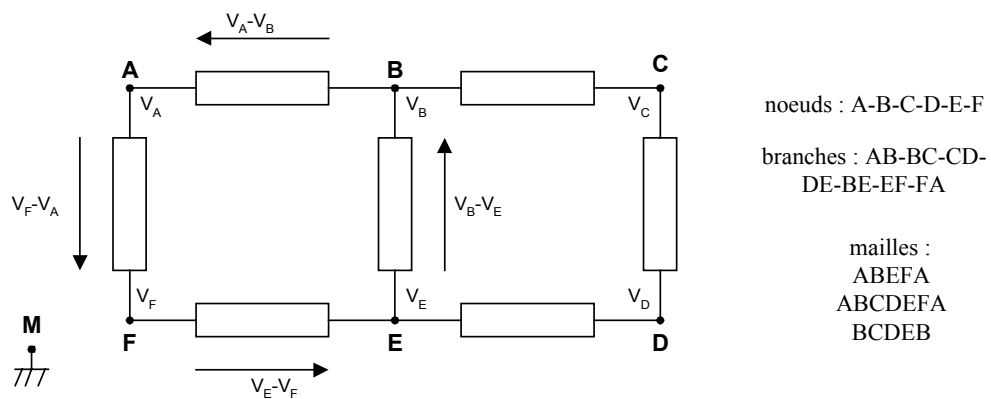
Un réseau ou circuit électrique est un ensemble de conducteurs reliant entre eux des éléments appelés composants : résistance, condensateur, bobine de self-induction, diode, transistor, ...

Dans un réseau électrique, on distingue :

- le nœud : point de raccordement entre au moins deux conducteurs
- la branche : portion du réseau compris entre deux nœuds
- la maille : partie du réseau qui se ferme sur elle même

### 1.5.1 Loi des mailles

Soit le réseau suivant :

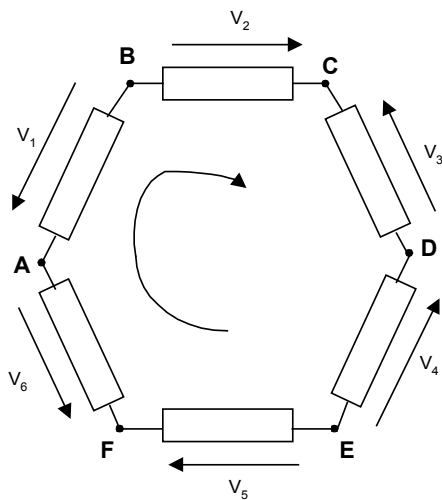


Soit une charge  $q$  se déplaçant le long d'une maille ; chaque nœud de la maille se trouve à un potentiel bien défini par rapport à un nœud d'origine ou de référence commune M dont le potentiel est appelée masse.

$q$  se déplace le long de la maille ABEFA et subit des variations d'énergie potentielle le long du parcours. On a :

$$q(V_A - V_B + V_B - V_E + V_E - V_F + V_F - V_A) = q(0) = 0$$

car la charge  $q$  est revenue au point initial.



On choisit un sens arbitraire de parcours sur la maille : par exemple le sens des aiguilles d'une montre.

Les différences de potentiel sont des grandeurs algébriques et ont des orientations arbitraires.

Par convention, les différences de potentiel  $v_i$  des flèches parcourues dans le même sens que le parcours seront comptées positivement.

$$v_1 = V_A - V_B$$

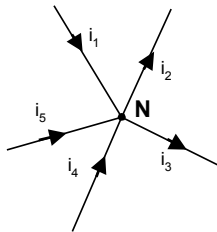
$$\text{On a ici : } -v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 - v_6 = 0$$

**Définition :** La somme des différences de potentiel le long d'une maille est nulle. Cette loi est baptisée loi des mailles ou première loi de Kirschhoff.

Mathématiquement on a : 
$$\sum_i v_i = 0$$

### 1.5.2 Loi des nœuds

Le mouvement des charges, créant le courant est soumis aux lois de la physique : conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et de la charge (de la matière).



On choisit un sens arbitraire pour chaque courant. Par convention, les courants  $i_i$  se dirigeant dans le même sens que les flèches seront comptés positivement.

Soit le nœud N un point de raccordement de plusieurs conducteurs traversés par des courants.

En un nœud, il ne peut y avoir accumulation de charges.

On a donc ici :

$$i_1 + i_4 + i_5 = i_2 + i_3$$

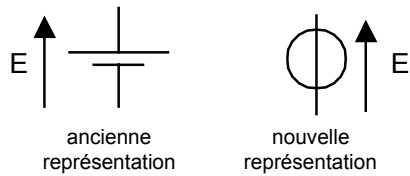
**Définition :** La somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant. Cette loi est baptisée loi des nœuds ou seconde loi de Kirschhoff.

Mathématiquement on a : 
$$\sum_i i_i = 0$$

## 1.6 Générateurs idéaux

### 1.6.1 Générateur de tension idéal

Un générateur de tension idéal délivre une différence de potentiel indépendante du courant qu'il délivre. On représente ce générateur par les symboles suivants :

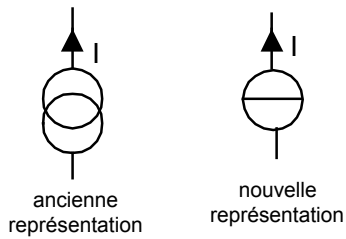


Ce générateur de tension n'existe pas et en pratique, la différence de potentiel en sortie d'un générateur de tension décroît en fonction du courant de sortie.

### 1.6.2 Générateur de courant idéal

Un générateur de courant idéal délivre un courant indépendamment de la différence de potentiel entre ses bornes.

On représente ce générateur par les symboles suivants :



## 2 LES DIPOLES PASSIFS ELEMENTAIRES

### 2.1 Introduction

Les composants utilisés en électronique présentent des bornes électriques ou pôles permettant leur connexion dans un réseau. On distingue :

- les dipôles ( 2 pôles) comme les résistances, les condensateurs, les bobines, les piles, les diodes, ...
- les quadripôles (4 pôles) comme par exemple les transformateurs, les filtres.

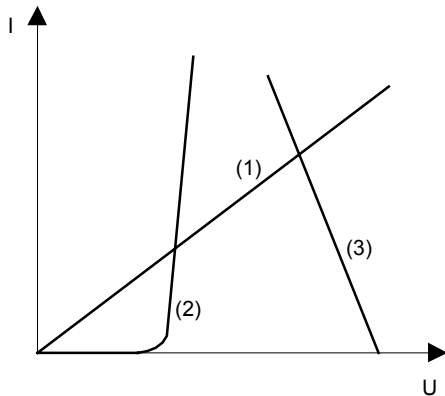
### 2.2 Caractéristique d'un dipole

Soit un dipole traversé par un courant électrique  $I$  et dont la différence de potentiel entre ses bornes est  $U$ . La caractéristique de ce dipole est la courbe  $I=f(U)$ . Suivant l'allure de cette courbe, on peut distinguer différentes familles de dipole.

**Dipole linéaire** : la caractéristique  $I=f(U)$  est une droite d'équation  $I=aU+b$ . Par exemple, les résistances et les générateurs de tension et de courant idéaux sont des dipôles linéaires. Si la caractéristique  $I=f(U)$  n'est pas une droite le dipole est non linéaire

**Dipole passif** : un dipôle est passif si son intensité de court-circuit est nulle et si la différence de potentiel à ses bornes est nulle en circuit ouvert. Dit autrement, pour un dipole passif, on a  $I=0$  si  $U=0$ . Les trois circuits passifs principaux sont la résistance, la bobine d'induction et la capacité. Dans les autres cas, on dit que le dipole est actif.

Exemple :



Le dipole 1 est linéaire et passif (il s'agit d'une résistance)

Le dipole 2 est non linéaire et passif (diode)

Le dipole 3 est linéaire et actif (générateur de tension non parfait)

Le dipole 4 est linéaire et actif (générateur de tension parfait)

### 2.3 Les dipôles passifs élémentaires

#### 2.3.1 Résistance<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Certains auteurs utilisent la terminologie résistor pour bien distinguer le nom du dipôle. Dans ce document, nous utiliserons le mot résistance pour désigner le dipôle et sa valeur.



Une résistance est un dipôle constitué par un matériau conducteur et caractérisé par sa résistance  $R$  exprimée en ohm ( $\Omega$ )

La résistance s'obtient comme suit :

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

Où  $\rho$  est la résistivité en  $\Omega m$ ,  $l$  est la longueur et  $s$  est la section du conducteur.

Pratiquement  $\rho$  varie entre  $10^{-8}$  et  $10^{-6} \Omega m$ .

Il existe également des résistances dont la résistance varie en fonction d'un paramètre comme la température (thermistance).

### 2.3.2 Bobine d'induction

La bobine d'induction est un dipôle constitué d'un conducteur métallique enroulé autour d'un support cylindrique. Lorsqu'un courant traverse celle-ci, elle produit un champ magnétique dans l'espace environnant

Le coefficient d'induction ou inductance qui s'exprime en henry (H) est le suivant :

$$L = \mu N^2 \frac{S}{l}$$

$N$  est le nombre de spires.  $s$  est la section du conducteur métallique en  $m^2$  et  $l$  est la longueur du support cylindrique.

$\mu = 4\pi 10^{-7}$  H/m dans le vide

Une bobine pure n'existe pas. En pratique, elle est toujours en série avec une petite résistance.

### 2.3.3 Condensateur

Le condensateur est formé de deux plaques métalliques séparées par un isolant. La répartition de charge sur une plaque influe sur la répartition des charges sur l'autre plaque. Le condensateur est caractérisé par sa capacité  $C$  qui s'exprime en farad (F):

$$C = \varepsilon \frac{S}{e}$$

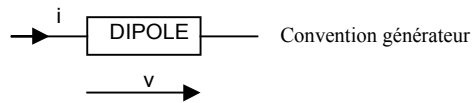
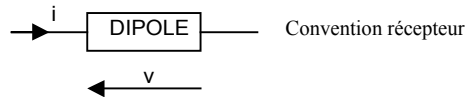
$S$  est la surface de l'armature du condensateur et  $e$  est la distance entre les deux armatures.

$\varepsilon$  est la permittivité en F/m. Elle dépend du milieu et de la permittivité du vide  $\varepsilon_0 = 8,84.10^{-12}$  F/m

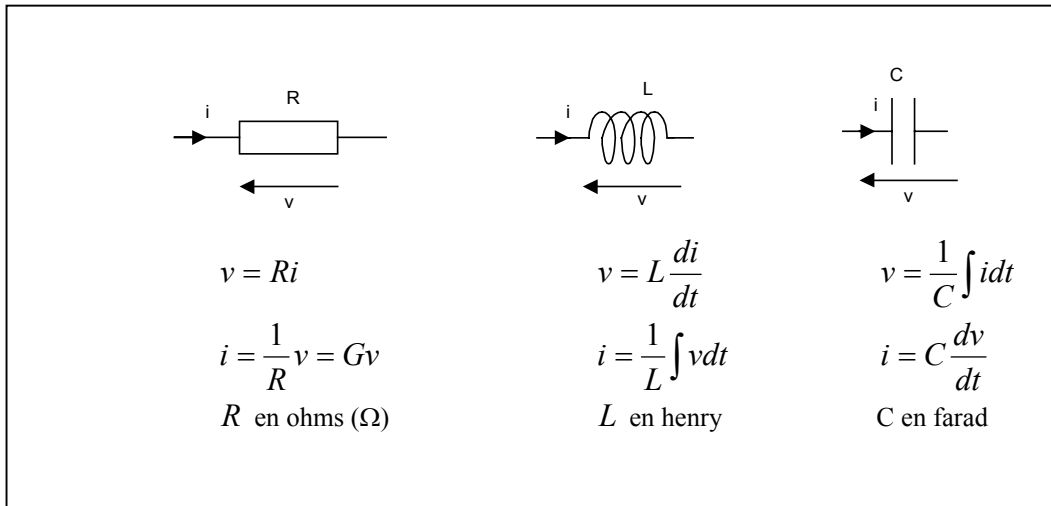
Comme 1 farad représente une très grande capacité, on utilise généralement les sous-multiples comme le  $\mu F$ , nF et pF.

## 2.4 Lois générales des dipôles passifs

Il existe deux choix pour l'orientation du courant  $i$  et de la différence de potentiel  $v$



Nous allons maintenant rappeler les lois générales des 3 types de dipôles passifs élémentaires : résistance, bobine et condensateur :



remarques :

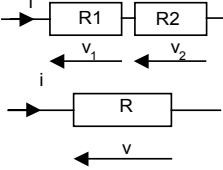
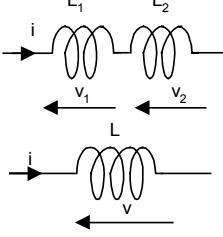
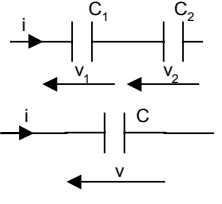
Dans une bobine, le courant ne peut pas subir une variation brutale :  $\frac{di}{dt} = +\infty$  impliquerait une différence de potentiel  $v = +\infty$ .

De la même façon, la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier brutalement instantanément :  $\frac{dv}{dt} = +\infty$  impliquerait un courant  $i = +\infty$ .

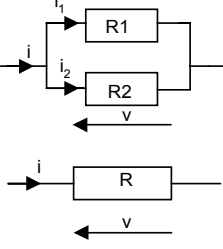
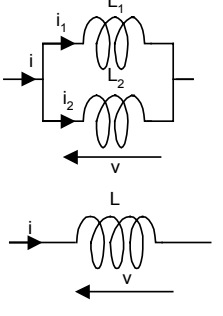
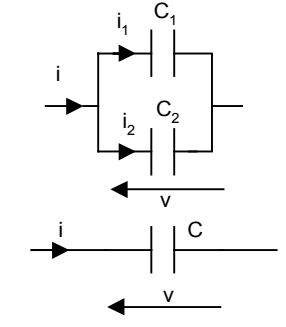
En continu, la bobine est un court-circuit et le condensateur est un circuit ouvert.

## 2.5 Association de dipôles de même nature

en série :

 <p> <math>v = v_1 + v_2</math>  <math>Ri = R_1i + R_2i</math>  <math>\Rightarrow R = R_1 + R_2</math> </p> <p>Généralisation :</p> $R = \sum_i R_i$	 <p> <math>v = v_1 + v_2</math>  <math>L \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}</math>  <math>\Rightarrow L = L_1 + L_2</math> </p> <p>Généralisation :</p> $L = \sum_i L_i$	 <p> <math>v = v_1 + v_2</math>  <math>\frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt</math>  <math>\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}</math> </p> <p>Généralisation :</p> $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$
---	--	---

en parallèle :

 <p> <math>i = i_1 + i_2</math>  <math>\frac{v}{R} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2}</math>  <math>\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}</math> </p> <p>Généralisation :</p> $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$	 <p> <math>i = i_1 + i_2</math>  <math>\frac{1}{L} \int vdt = \frac{1}{L_1} \int vdt + \frac{1}{L_2} \int vdt</math>  <math>\Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}</math> </p> <p>Généralisation :</p> $\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}$	 <p> <math>i = i_1 + i_2</math>  <math>C \frac{dv}{dt} = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt}</math>  <math>\Rightarrow C = C_1 + C_2</math> </p> <p>Généralisation :</p> $C = \sum_i C_i$
--	---	--

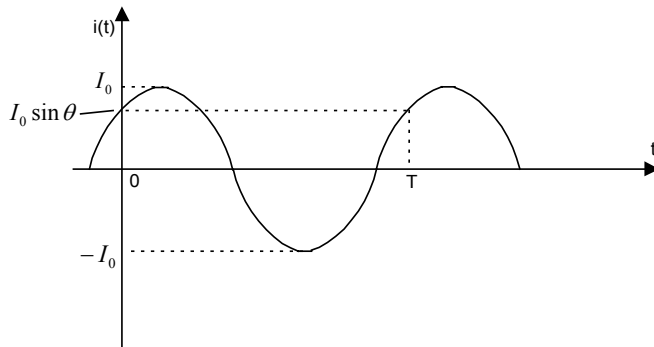
## 2.6 Lois des dipôles en régime sinusoïdal

Après avoir rappelé les lois générales, nous allons nous intéresser au régime sinusoïdal qui est le régime de fonctionnement le plus souvent utilisé en électronique.

Soit un courant variant en fonction du temps selon la loi sinusoïdale suivante :

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

$I_0$  est l'amplitude maximum du signal en ampère.



Soit  $\Phi(t) = \omega t + \theta$  la phase du courant fonction linéaire en fonction du temps en radian.

$\theta$  est la phase à l'origine :  $\theta = \Phi(0)$

En dérivant  $\Phi$  par rapport au temps on obtient la pulsation  $\omega$  :

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt} \text{ en radian/seconde}$$

La fréquence  $f$  est le nombre de périodes par seconde.  $f$  s'obtient en divisant la pulsation par  $2\pi$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \omega \text{ en seconde}^{-1} \text{ ou Hertz}$$

Pour éviter des calculs fastidieux lors de l'étude des associations de dipôles en série et en parallèle on utilise deux méthodes pratiques:

- le diagramme de Fresnel
- la notation complexe

## 2.7 Diagrammes de Fresnel

Les diagrammes de Fresnel permettent de représenter graphiquement  $i$  et  $v$  par des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{v}$  dans une base orthonormée.

Supposons pour simplifier que la phase à l'origine  $\theta = 0$ . On a donc  $i(t) = I_0 \sin \omega t$

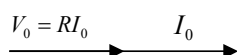
Appliquons les lois d'ohm aux dipôles résistance, bobine et condensateur.

Cas de la résistance :

$$v = Ri$$

$$v = RI_0 \sin \omega t = V_0 \sin \omega t \text{ avec } V_0 = RI_0$$

Les deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{v}$  sont en phase

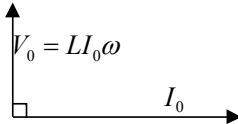


Cas de la bobine :

$$v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt}(I_0 \sin \omega t)$$

$$v = LI_0 \omega \cos \omega t = V_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ avec } V_0 = LI_0 \omega$$

Pour la bobine, le vecteur  $\vec{v}$  est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur le vecteur  $\vec{i}$ .

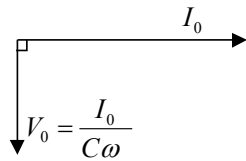


Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_0 \sin \omega t dt$$

$$v = -\frac{I_0}{C\omega} \cos \omega t = V_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ avec } V_0 = \frac{I_0}{C\omega}$$

Pour le condensateur, le vecteur  $\vec{v}$  est en retard de  $\frac{\pi}{2}$  sur le vecteur  $\vec{i}$ .



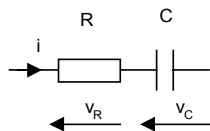
Pour les unités,  $R$ ,  $L\omega$  et  $\frac{1}{C\omega}$  sont homogènes à des ohms ( $\Omega$ ).

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L\omega \rightarrow 0$ , la bobine se comporte comme un court-circuit. et  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$ , le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L\omega \rightarrow \infty$ , la bobine se comporte comme un circuit ouvert et  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$ , le condensateur se comporte comme un court circuit.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'association de dipôles de nature différentes.

Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :

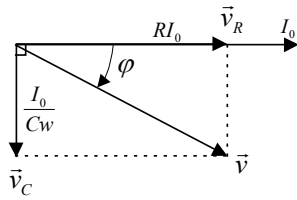


$$i = I_0 \sin \omega t$$

$$v_R = RI_0 \sin \omega t$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_0}{C\omega} \cos \omega t = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$v = v_R + v_C = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



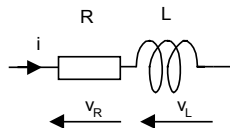
le vecteur  $\vec{v}$  est la somme des vecteurs  $\vec{v}_R$  et  $\vec{v}_C$   
 $\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{i}$

On a :

$$V_0 = \sqrt{R^2 I_0^2 + \frac{I_0^2}{C^2 \omega^2}} = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)$$

Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :

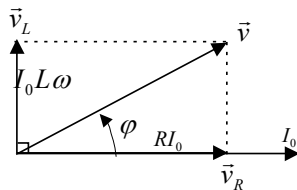


$$i = I_0 \sin \omega t$$

$$v_R = RI_0 \sin \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = L_0 \omega I_0 \cos \omega t = L_0 \omega I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = v_R + v_L = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



le vecteur  $\vec{v}$  est la somme des vecteurs  $\vec{v}_L$  et  $\vec{v}_R$   
 $\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{i}$

On a :

$$V_0 = \sqrt{R^2 I_0^2 + L^2 \omega^2 I_0^2} = I_0 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

## 2.8 Notation complexe et impédance complexe

Dans le cas du régime sinusoïdal, on utilise les nombres complexes pour simplifier les calculs des dipôles de nature différente.

Une grandeur sinusoïdale (courant ou différence de potentiel) est caractérisé par deux nombres : l'amplitude et la phase  $\Phi(t) = \omega t + \theta$ .

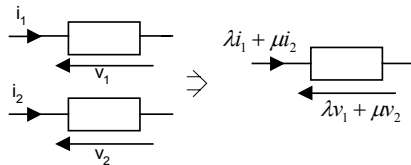
Il est donc naturel de représenter une grandeur sinusoïdale par un nombre complexe lorsque le circuit est linéaire et que les opérations à effectuer sont aussi linéaires.

**Définition** : un circuit est linéaire si :

soumis à un courant  $i_1(t) = I_0 \cos \omega t$ , la différence de potentiel est  $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$

soumis à un courant  $i_2(t) = I_0 \sin \omega t$ , la différence de potentiel est  $v_2(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$

alors soumis à la combinaison linéaire  $\lambda i_1(t) + \mu i_2(t)$ , la différence de potentiel est de la forme  $\lambda v_1(t) + \mu v_2(t)$



Posons  $\lambda = 1$  et  $\mu = j$ . La différence de potentiel associée à la combinaison linéaire

$\underline{i}(t) = i_1(t) + j i_2(t) = I_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) = I_0 \exp(j \omega t)$  est la suivante :

$$\underline{v}(t) = v_1(t) + j v_2(t) = V_0 [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = V_0 \exp(j \omega t + \varphi)$$

Dans le reste de ce document, on se limitera à l'étude des circuits linéaires avec des opérateurs linéaires (addition, multiplication par constante, dérivation, intégration).

Si le courant est de la forme  $i_1(t) = I_0 \cos \omega t = \Re(\underline{i}(t))$  partie réelle de  $\underline{i}(t)$ , la différence de potentiel

$v_1(t) = V_0 (\cos \omega t + \varphi) = \Re(\underline{v}(t))$  partie réelle de  $\underline{v}(t)$ .

De même la différence de potentiel  $v_2(t)$  associé au courant  $i_2(t) = I_0 \sin \omega t = \Im(\underline{i}(t))$  est

$v_2(t) = V_0 (\sin \omega t + \varphi) = \Im(\underline{v}(t))$

On définit l'impédance complexe  $\underline{Z}$  d'un dipôle comme suit :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$

avec  $\underline{i} = I_0 \exp(j \omega t)$  et  $\underline{v} = V_0 \exp(j \omega t + \varphi)$

Cas de la résistance :

Nous avons vu que

$$v = R i$$

On a :

$$\underline{v} = R I_0 \exp(j \omega t)$$

L'impédance complexe de la résistance est donc :  $\underline{Z} = R$

Cas de la bobine :

$$v = L \frac{di}{dt}$$

calculons  $\frac{di}{dt}$  :

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= I_0 \left[ \frac{d}{dt} \cos(\omega t) + j \frac{d}{dt} \sin(\omega t) \right] \\ &= I_0 [-\omega \sin(\omega t) + j\omega \cos(\omega t)] \\ &= I_0 \omega j \left[ \cos(\omega t) - \frac{1}{j} \sin(\omega t) \right] \\ &= jI_0 \omega [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = j\omega \underline{i} \end{aligned}$$

dériver revient donc à multiplier par  $j\omega$

On a :

$$\underline{v} = L \frac{di}{dt} = jL\omega \underline{i} = jL\omega I_0 \exp(j\omega t)$$

L'impédance complexe de la bobine est donc :  $\underline{Z} = jL\omega$

Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C} \int i dt$$

calculons  $\int \underline{i} dt$  :

$$\begin{aligned} \int \underline{i} dt &= \int I_0 \cos(\omega t) dt + j \int I_0 \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) - j \frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ &= -\frac{I_0 j}{\omega} \left[ \cos(\omega t) - \frac{1}{j} \sin(\omega t) \right] \\ &= \frac{I_0}{j\omega} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = \frac{1}{j\omega} \underline{i} \end{aligned}$$

intégrer revient donc à diviser par  $j\omega$

On a :

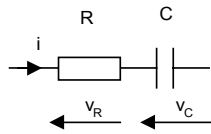
$$\underline{v} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} = \frac{1}{jC\omega} I_0 \exp(j\omega t)$$

L'impédance complexe du condensateur est donc :  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$



Comme dans le paragraphe précédent sur le diagramme de Fresnel, nous allons maintenant étudier l'association de dipôles de nature différentes en utilisant les impédances complexes.

Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :



$$i \text{ sinusoidal} \Rightarrow \underline{i} = I_0 \exp(j\omega t)$$

$$v_R \Rightarrow \underline{v}_R = R\underline{i}$$

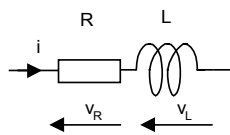
$$v_C \Rightarrow \underline{v}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_C = \left[ R + \frac{1}{jC\omega} \right] \underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

On retrouve le module et l'argument de  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\varphi)$  :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega}$$

Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :



$$i \text{ sinusoidal} \Rightarrow \underline{i} = I_0 \exp(j\omega t)$$

$$v_R \Rightarrow \underline{v}_R = R\underline{i}$$

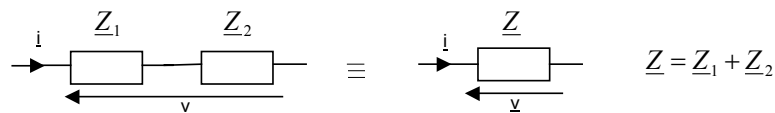
$$v_L \Rightarrow \underline{v}_L = jL\omega \underline{i}$$

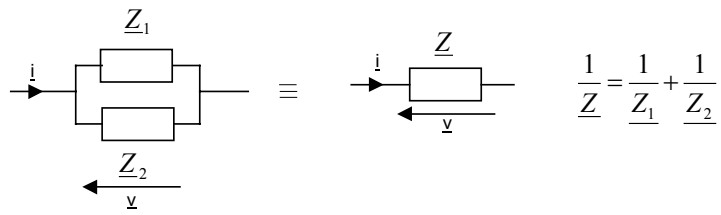
$$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L = [R + jL\omega] \underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

On retrouve le module et l'argument de  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\varphi)$  :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

On retrouve avec les impédances complexes les mêmes lois que celles établies pour l'association de dipôles de même nature :





On a ainsi vu que l'utilisation de l'impédance complexe permet de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques ce qui simplifie grandement l'étude de l'association de circuits de nature différente en régime sinusoïdal.

### 3 PUISSANCE ET ENERGIE

#### 3.1 Définitions

Si on applique une différence de potentiel  $v = v_A - v_B$  entre deux points A et B, les charges se déplaçant de B vers A subissent une variation d'énergie potentielle<sup>2</sup>

Pour une charge élémentaire  $dq$  se déplaçant de B vers A, le travail ou l'énergie potentielle  $dW$  s'exprime comme suit :

$$dW = v dq \quad \text{pendant le temps } dt$$

Le déplacement de la charge élémentaire  $dq$  sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel

entre les points A et B en un temps  $dt$  induit un courant  $i = \frac{dq}{dt}$ .

D'où l'énergie potentielle :  $dW = vidt$

Le travail fourni (cas d'un générateur) ou reçu (cas d'un récepteur) par l'élément du circuit entre A et B entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} vidt \quad W \text{ en Joules}$$

**Définition** : la puissance instantanée  $p_i(t)$  fournie ou reçue par le dipôle entre A et B est la dérivée de  $W$  par rapport au temps.

$$p_i = \frac{dW}{dt}$$

$p_i$  peut donc aussi être définie comme suit :

$$p_i = vi$$

La puissance instantanée  $p_i$  est le produit de la différence de potentiel  $v(t)$  par le courant  $i(t)$ .

Si  $p_i > 0$ , le dipôle est générateur ; si  $p_i < 0$  le dipôle est récepteur.

**Définition** : la valeur moyenne d'une fonction quelconque  $x(t)$  sur l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  est

$$x_{MOY} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Si  $x(t)$  est périodique de période  $T$ , alors on a :

$$x_{MOY} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Si  $x(t)$  est sinusoidale, alors  $x_{MOY} = 0$

---

<sup>2</sup> Par convention, on utilisera des lettres minuscules pour les variables et des lettres majuscules pour les constantes

La puissance moyenne  $P$  est l'énergie fournie ou reçue sur l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dW = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v i dt$$

Si  $v$  et  $i$  sont sinusoidaux de période  $T$ , le calcul de la puissance moyenne  $P$  se fait sur l'intervalle de temps  $T$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dW = \frac{1}{T} \int_0^T v i dt \quad P \text{ en watts}$$

**Définition** : la valeur efficace d'une fonction périodique  $x(t)$  de période  $T$  est :

$$x_{EFF}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Si la fonction  $x(t)$  est sinusoidale, on a :  $x(t) = X_0 \sin \omega t$

$$x_{EFF}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T X_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T X_0^2 \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt = \frac{X_0^2}{2}$$

$$\text{D'où } x_{EFF} = \frac{X_0}{\sqrt{2}}$$

## 3.2 Cas particuliers

### 3.2.1 Energie consommée dans une résistance

Cas  $V$  et  $I$  continus :

$$V = RI$$

La puissance moyenne est égale à la puissance instantanée  $P$  :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V I dt = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

L'énergie dissipée thermiquement sur l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V I dt = VI(t_2 - t_1)$$

Cas  $v$  et  $i$  sinusoidaux :

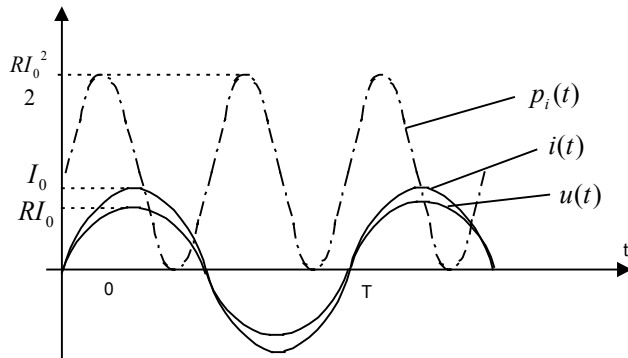
$$i = I_0 \sin \omega t \text{ et } v = Ri = V_0 \sin \omega t = RI_0 \sin \omega t$$

$$p_i = RI_0^2 \sin^2 \omega t = RI_0^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right)$$

L'énergie dissipée  $W$  pendant une période  $T$  est :

$$W = \int_0^T p_i dt = \int_0^T RI_0^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) dt$$

$$W = \frac{RI_0^2}{2}T \quad \text{et} \quad P = \frac{RI_0^2}{2} = \frac{V_0 I_0}{2}$$



En régime sinusoïdal, puisque  $I_{EFF} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  et  $V_{EFF} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ , on a la relation entre  $P, V_{EFF}, I_{EFF}$

$$P = V_{EFF} I_{EFF}$$

### 3.2.2 Energie dans une bobine

Cas  $v$  et  $i$  sinusoïdaux :

$$i = I_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v = L \frac{di}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t) = L_0 \omega I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_i = L\omega I_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p_i dt = L\omega I_0^2 \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = \frac{L\omega I_0^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sin(2\omega t) dt \quad \text{car} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$W = \frac{L\omega I_0^2}{2} \frac{1}{2\omega} [-\cos(2\omega t)]_{t_1}^{t_2} = \frac{LI_0^2}{4} [\cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_2)]$$

Calculons l'énergie stockée puis restituée par la bobine pendant une période  $T$

Entre  $0$  et  $\frac{T}{4}$ , l'aire soutendue par  $p_i(t)$  est positive ; la bobine stocke de l'énergie. Elle se comporte en récepteur.

Calculons l'énergie stockée pendant cette phase. On a :

$$W_{stockée} = \frac{LI_0^2}{4} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(2\omega t) dt = \frac{LI_0^2}{4} [-\cos(2\omega t)]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{LI_0^2}{4} \left[ \cos(0) - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right] = \frac{LI_0^2}{2}$$

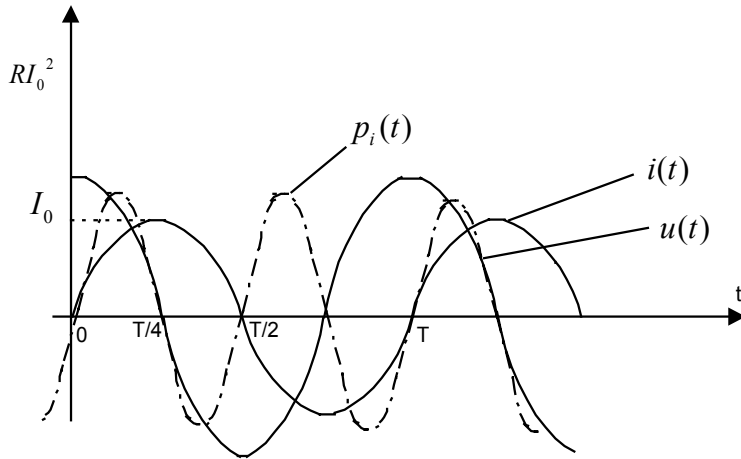
Entre  $\frac{T}{4}$  et  $\frac{T}{2}$ , l'aire soutendue par  $p_i(t)$  est négative ; la bobine restitue de l'énergie. Elle se comporte en générateur.

Calculons l'énergie restituée pendant cette phase. On a :

$$W_{\text{restituée}} = \frac{LI_0^2}{4} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin(2\omega t) dt = \frac{LI_0^2}{4} [-\cos(2\omega t)]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = \frac{LI_0^2}{4} \left[ \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) \right] = -\frac{LI_0^2}{2}$$

Pendant la durée  $\frac{T}{2}$ , l'énergie dépensée par la bobine est nulle. On dit que le dipôle est purement réactif.

L'énergie stockée (sous forme magnétique) pendant  $\frac{T}{4}$  est restituée intégralement pendant le quart de période suivant.



### 3.2.3 Energie dans un condensateur

Cas  $v$  et  $i$  sinusoïdaux :

$$i = I_0 \sin(\omega t) \text{ et } v = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t) = \frac{I_0}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_i = -\frac{I_0^2}{C\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p_i dt = -\frac{I_0^2}{C\omega} \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = -\frac{I_0^2}{2C\omega} \int_{t_1}^{t_2} \sin(2\omega t) dt \text{ car } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$W = -\frac{I_0^2}{4C\omega^2} [-\cos(2\omega t)]_{t_1}^{t_2} = -\frac{I_0^2}{4C\omega^2} [\cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_2)] = \frac{I_0^2}{4C\omega^2} [\cos(2\omega t_2) - \cos(2\omega t_1)]$$

Calculons l'énergie stockée puis restituée par la bobine pendant une période  $T$

Entre 0 et  $\frac{T}{4}$ , l'aire soutendue par  $p_i(t)$  est négative ; le condensateur restitue de l'énergie. Il se comporte en générateur.

Calculons l'énergie restituée pendant cette phase. On a :

$$W_{stockée} = -\frac{I_0^2}{2C\omega} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(2\omega t) dt = -\frac{I_0^2}{4C\omega^2} [-\cos(2\omega t)]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{I_0^2}{4C\omega^2} \left[ \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos(0) \right] = -\frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

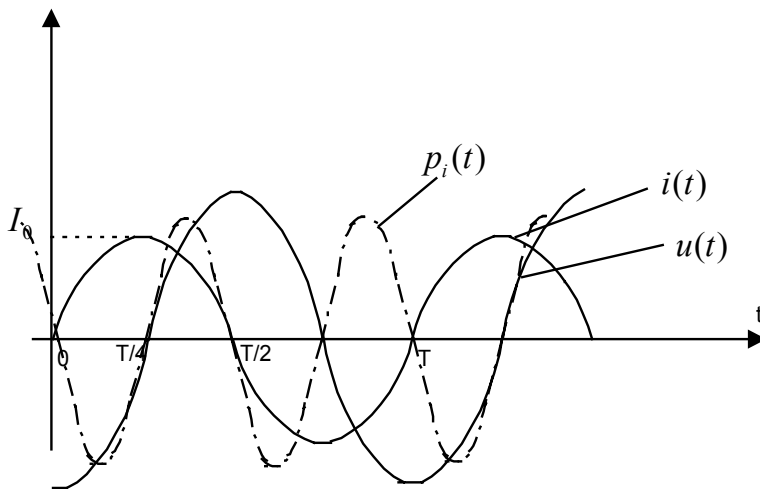
Entre  $\frac{T}{4}$  et  $\frac{T}{2}$ , l'aire soustendue par  $p_i(t)$  est négative ; le condensateur stocke de l'énergie. Il se comporte en récepteur.

Calculons l'énergie stockée pendant cette phase. On a :

$$W_{restituée} = -\frac{I_0^2}{2C\omega} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin(2\omega t) dt = -\frac{I_0^2}{4C\omega^2} [-\cos(2\omega t)]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{I_0^2}{4C\omega^2} \left[ \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right] = \frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

Pendant la durée  $\frac{T}{2}$ , l'énergie dépensée par le condensateur est nulle. Comme la bobine, le condensateur est un dipôle purement réactif. L'énergie restituée pendant  $\frac{T}{4}$  est stockée (sous forme électrique) intégralement pendant le quart de période suivant.



En résumé :

phase	Bobine L	condensateur
0 à $\frac{T}{4}$	La bobine stocke $\frac{LI_0^2}{2}$ (magnétique)	Le condensateur restitue $\frac{I_0^2}{2C\omega^2}$
$\frac{T}{4}$ à $\frac{T}{2}$	La bobine restitue $\frac{LI_0^2}{2}$	Le condensateur stocke $\frac{I_0^2}{2C\omega^2}$ (électrique)

### Cas de l'association d'une bobine et d'un condensateur :

L'association d'une bobine et d'un condensateur parfait est tel que pendant chaque phase, l'énergie stockée dans la bobine est égale à l'énergie restituée par le condensateur et vice versa.

Cette échange implique la relation :

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{I_0^2}{2C\omega^2} \quad \text{soit } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation de résonance}$$

L'échange d'énergie se fait donc au rythme de la pulsation de résonance. Nous reviendrons sur les circuits résonnants dans un prochain chapitre .

### **3.3 Puissance active, réactive et complexe dans un dipole quelconque**

$$i = I_0 \cos \omega t \quad \text{et} \quad v = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

La puissance active est la puissance moyenne. On a :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T} \int_0^T (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(-\varphi)) dt \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^T \cos(-\varphi) dt = \int_0^T \cos \varphi dt = T \cos \varphi$$

On obtient :

$$P = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi \quad \text{en Watt (W)}$$

$\cos \varphi$  est le facteur de puissance du dipole.

On définit également la puissance réactive  $Q$  :

$$Q = \frac{V_0 I_0}{2} \sin \varphi \quad \text{en VoltAmpère (VA)}$$

Il est à noter que la puissance réactive  $Q$  est nulle pour une résistance car on a  $\varphi = 0$



Exprimons la puissance active  $P$  et la puissance réactive  $Q$  en fonction du courant  $\underline{i}$  et de la différence de potentiel  $\underline{u}$ .

$$\text{Soit } i = I_0 \cos \omega t \quad \text{et} \quad v = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{i} = I_0 \exp(j\omega t) \quad \underline{i}^* = I_0 \exp(-j\omega t)$$

$$\underline{v} = V_0 \exp(j\omega t) \exp(j\varphi) \quad \underline{v}^* = V_0 \exp(-j\omega t) \exp(-j\varphi)$$

$$\underline{v}^* \underline{i} = V_0 I_0 \exp(-j\omega t) \exp(j\omega t) \exp(-j\varphi) = V_0 I_0 \exp(-j\varphi)$$

$$\underline{v} \underline{i}^* = V_0 I_0 \exp(j\omega t) \exp(-j\omega t) \exp(j\varphi) = V_0 I_0 \exp(j\varphi)$$

$$\underline{v}^* \underline{i} + \underline{v} \underline{i}^* = V_0 I_0 (\exp(-j\varphi) + \exp(+j\varphi)) = 2V_0 I_0 \cos \varphi$$

Ainsi, on a donc la relation suivante :

$$P = \frac{1}{4} (\underline{v}^* \underline{i} + \underline{v} \underline{i}^*)$$

En utilisant le même raisonnement, on obtient

$$Q = \frac{1}{4} (\underline{v}^* \underline{i} - \underline{v} \underline{i}^*)$$

La puissance réactive provient des éléments réactifs du circuit.

Finalement nous pouvons définir la puissance complexe d'un circuit par :

$$\underline{P} = P + jQ = \frac{V_0 I_0}{2} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{V_0 I_0}{2} \exp(j\varphi) = \frac{1}{2} \underline{v} \underline{i}^*$$

### 3.4 Force électromotrice et force contre électromotrice

#### 3.4.1 Générateur et force électromotrice

Un générateur convertit une énergie (mécanique, chimique, lumineuse, ...) en une énergie électrique.

Soit  $dW = p_i dt = v_i dt$  l'énergie fournie par le générateur au circuit

$dW_1$  l'énergie dissipée par effet Joule dans le générateur

$$dW_1 = Ri^2 dt$$

$dW_2$  l'énergie reçue de l'extérieur par le générateur. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on a la relation suivante :

$$dW_2 = dW + dW_1$$

$$dW = dW_2 - dW_1 \quad \Leftrightarrow \quad vidt = dW_2 - Ri^2 dt$$

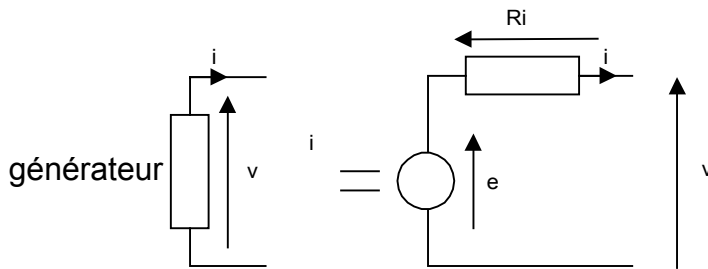
Divisons l'expression par  $idt$  :

$$v = \frac{dW_2}{idt} - Ri$$

Soit  $e = \frac{dW_2}{idt}$  la force électromotrice du générateur .

On a alors la relation :

$$v = e - Ri$$



On définit le rendement  $\eta$  du générateur comme le rapport de l'énergie fournie par le générateur sur l'énergie reçue :

$$\eta = \frac{\text{energie fournie}}{\text{energie reçue}} = \frac{dW}{dW_2} = \frac{dW_2 - dW_1}{dW_2} = 1 - \frac{dW_1}{dW_2} = 1 - \frac{Ri}{e}$$

Si les pertes sont faibles ( $Ri \ll e$ ), alors le rendement  $\eta$  est proche de 1.

### 3.4.2 Récepteur et force contre électromotrice

Un récepteur transforme une énergie électrique en une énergie (mécanique, chimique,...) et chaleur (énergie dissipée par effet Joule) .

Soit  $dW = p_i dt = vidt$  l'énergie reçue par le récepteur

$dW_1$  l'énergie dissipée par effet Joule dans le récepteur (chaleur).

$$dW_1 = Ri^2 dt$$

$dW_2$  l'énergie transformée (mécanique, chimique, ...) par le récepteur. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on a la relation suivante :

$$dW = dW_1 + dW_2 \quad \Leftrightarrow \quad vidt = Ri^2 dt + dW_2$$

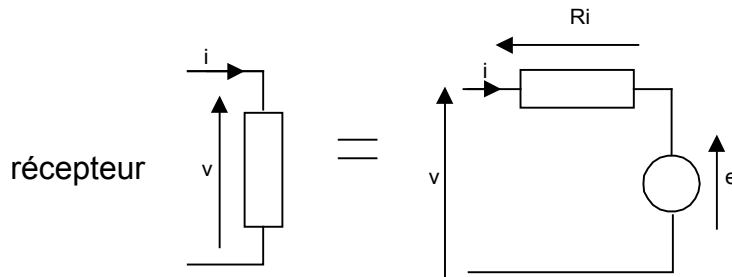
Divisons l'expression par  $idt$  :

$$v = Ri + \frac{dW_2}{idt}$$

Soit  $e = \frac{dW_2}{idt}$  la force contre électromotrice du générateur .

On a alors la relation :

$$v = Ri + e$$



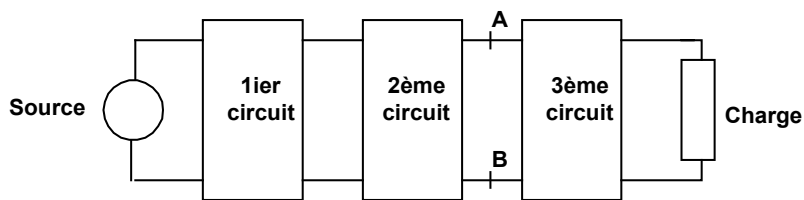
On définit le rendement  $\eta$  du récepteur comme le rapport de l'énergie transformée (mécanique, chimique,...) sur l'énergie reçue par le récepteur :

$$\eta = \frac{\text{énergie transformée}}{\text{énergie reçue}} = \frac{dW_2}{dW} = \frac{dW_2}{dW_1 + dW_2} = \frac{e}{e + Ri}$$

Si les pertes sont faibles ( $Ri \ll e$ ), alors le rendement  $\eta$  est proche de 1.

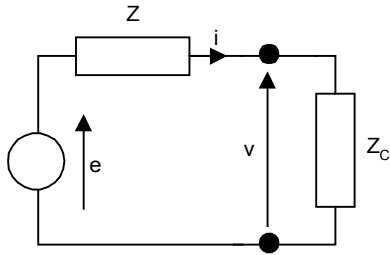
### 3.5 Adaptation d'impédance

Enoncé du problème : entre une source et une charge on trouve souvent une chaîne de quadripôles. Les quadripôles seront étudiés dans un prochain chapitre. L'objectif de l'adaptation d'impédance est de permettre que le maximum de puissance disponible à la sortie d'un circuit soit transmis au circuit suivant. La figure suivante montre un exemple d'une chaîne de quadripôles.



L'étude des quadripôles nous montrera que l'ensemble en amont de AB peut être remplacé par un générateur de force électromotrice  $e$  d'impédance complexe  $\underline{Z}$  et l'ensemble en aval de AB par une impédance complexe  $\underline{Z}_C$ .

On est donc ramené au problème suivant : soit le schéma suivant :



Avec  $\underline{Z} = R + jX$  et  $\underline{Z}_c = R_c + jX_c$

Déterminons la relation entre  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}_c$  pour avoir le maximum de puissance transmise.

La puissance active transmise à  $\underline{Z}_c$  est égale à :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{4} (\underline{v}^* \underline{i} + \underline{v} \underline{i}^*) \\
 &= \frac{1}{4} (\underline{Z}_c^* \underline{i}^* \underline{i} + \underline{Z}_c \underline{i} \underline{i}^*) \quad \text{comme } \underline{v} = \underline{Z}_c \underline{i} \text{ et } \underline{v}^* = \underline{Z}_c^* \underline{i}^* \\
 &= \frac{1}{4} (\underline{Z}_c + \underline{Z}_c^*) \underline{i}^* \underline{i} \\
 &= \frac{R}{2} \underline{i}^* \underline{i} \quad \text{car } \underline{Z}_c + \underline{Z}_c^* = 2R
 \end{aligned}$$

Calculons le courant complexe  $\underline{i}$  et son conjugué  $\underline{i}^*$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{Z}_c} \quad \text{et} \quad \underline{i}^* = \frac{\underline{e}^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_c^*}$$

$$\underline{i} \underline{i}^* = \frac{\underline{e} \underline{e}^*}{(\underline{Z} + \underline{Z}_c)(\underline{Z}^* + \underline{Z}_c^*)}$$

$$\underline{i} \underline{i}^* = \frac{|e|^2}{(R + R_c)^2 + (X + X_c)^2}$$

d'où

$$P = \frac{R_c}{2} \frac{|e|^2}{(R + R_c)^2 + (X + X_c)^2}$$

la puissance  $P$  est fonction de  $R$ ,  $R_c$ ,  $X$  et  $X_c$

$P$  varie de 0 à  $\pm \infty$  pour  $X_c$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .  $P$  passe par un maximum pour  $\frac{dP}{dX_c} = 0$

$$\frac{dP}{dX_c} = \frac{R_c |e|^2}{2} \frac{(-2(X + X_c))}{((R + R_c)^2 + (X + X_c)^2)^2}$$

$$\frac{dP}{dX_c} = 0 \text{ lorsque } X = -X_c$$

$P$  est alors égale à :

$$P = \frac{R_c}{2} \frac{|e|^2}{(R + R_c)^2}$$

Déterminons maintenant  $R_c$  pour avoir la puissance maximale transmise

Cette valeur s'obtient lorsque  $\frac{dP}{dR_c} = 0$

$$\frac{dP}{dR_c} = \frac{|e|^2}{2} \frac{(R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c)}{(R + R_c)^4}$$

$$\frac{dP}{dR_c} = 0 \Leftrightarrow (R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 - R_c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R = R_c$$

Ainsi, pour avoir un transfert maximal de puissance, il faut  $\underline{Z}_c = \underline{Z}^*$

Conclusion : une charge est adaptée à un générateur d'impédance interne complexe  $\underline{Z}$  lorsque son impédance complexe  $\underline{Z}_c$  est égale à l'impédance interne conjuguée du générateur.

Pour cette égalité, on a  $P = \frac{|e|^2}{8R_c}$

## 4 METHODES D'ANALYSE DES RESEAUX

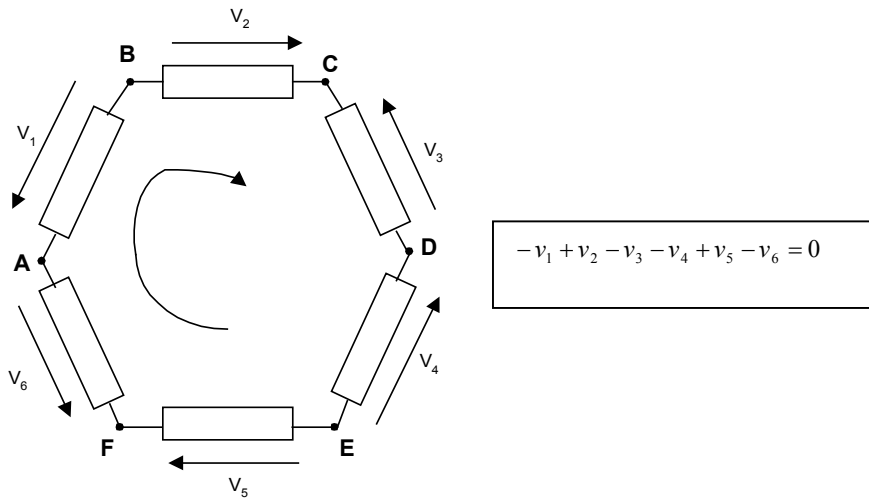
### 4.1 Introduction

L'analyse des réseaux en régime établi ou permanent repose sur les lois introduites dans les chapitres précédents :

- la loi des mailles : la somme des différences de potentiel le long d'une maille est nulle :

$$\sum_i v_i = 0$$

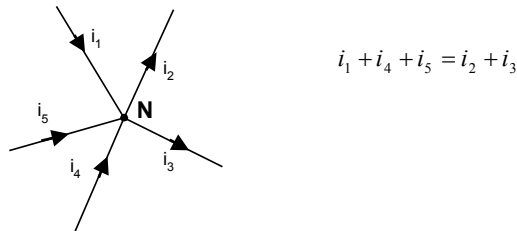
exemple :



- loi des nœuds : la somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant

$$\sum_i i_i = 0$$

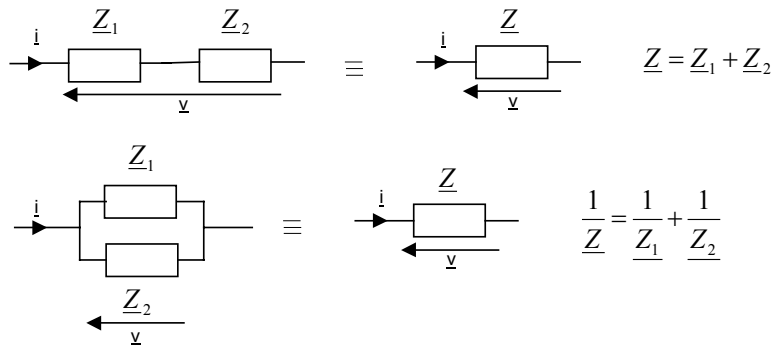
exemple :



- loi des dipôles passifs

$$\underline{v} = \underline{Z}i$$

- loi d'association de dipôle en parallèle et en série



## 4.2 Méthode des courants des mailles

Cette méthode est basée sur la loi des mailles.

1 – on recherche le nombre de mailles indépendantes. On a la relation suivante :

$$M = B - (N - 1)$$

avec M le nombre de mailles indépendantes, B le nombre de branches et N le nombre de nœuds du réseau.

2 – on attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours

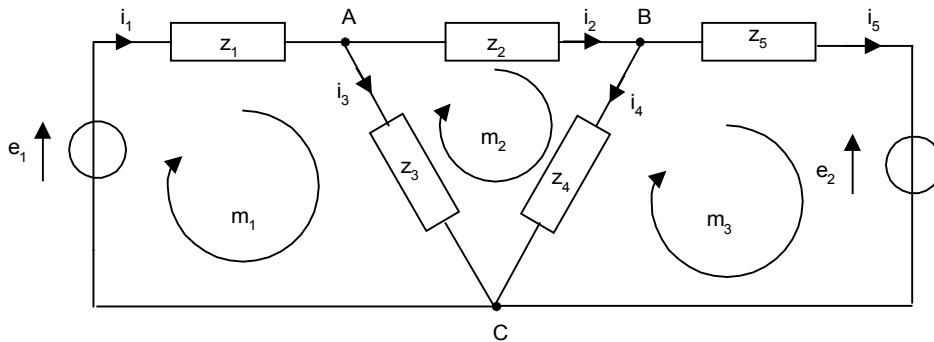
3 – on écrit pour chaque maille l'équation de maille dont les inconnus sont les courants en utilisant la loi des mailles

4 – on résout le système d'équations

5 – on calcule les courants circulant dans chaque branche à partir des courants de maille

6 – on en déduit la différence de potentiel entre deux nœuds en utilisant les lois des dipôles

exemple : soit le réseau suivant :



1 – nœuds A, B, C . N=3

branches  $(e_1, z_1), (z_2), (z_3), (z_4), (e_2, z_5)$  B=5

d'où  $M=B-(N-1)=5-(3-1)=3$  mailles indépendantes :

maille  $m_1$  : composée de  $e_1, z_1$  et  $z_3$

maille  $m_2$  : composée de  $z_2, z_4$  et  $z_3$

maille  $m_3$  : composée de  $e_2, z_4$  et  $z_5$

2 – on attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours

$$\begin{aligned}im_1 &= i_1 \\im_2 &= i_2 \\im_3 &= i_5\end{aligned}$$

Ainsi, chaque courant peut s'exprimer à partir des 3 courants de maille :

$$\begin{aligned}i_1 &= im_1 \\i_2 &= im_2 \\i_3 &= i_1 - i_2 = im_1 - im_2 \\i_4 &= i_2 - i_5 = im_2 - im_3 \\i_5 &= im_3\end{aligned}$$

3 –équations des mailles :

$$\begin{aligned}e_1 - z_1 i_1 - z_3 i_3 &= 0 \\-z_2 i_2 - z_4 i_4 + z_3 i_3 &= 0 \\-e_2 + z_4 i_4 - z_5 i_5 &= 0\end{aligned}$$

On remplace les courants  $i$  par les courants de mailles  $im$ . On obtient finalement les équations suivantes :

$$\begin{aligned}e_1 - (z_1 + z_3) im_1 - z_3 im_2 &= 0 \\z_3 im_3 - (z_2 + z_3 + z_4) im_2 + z_4 im_3 &= 0 \\-e_2 + z_4 im_2 - (z_4 + z_5) im_3 &= 0\end{aligned}$$

Il faut noter qu'un signe moins signifie que le courant circule en sens inverse de celui de la figure. Comme nous avons un système à trois équations et trois inconnus, il est possible de le résoudre en utilisant la méthode de substitution ou la règle de Kramer (approche matricielle).

Cette technique présente l'avantage de déterminer tous les courants dans l'ensemble des branches. Les calculs pour un réseau compliqué sont cependant lourds.

### 4.3 Théorème de Millman

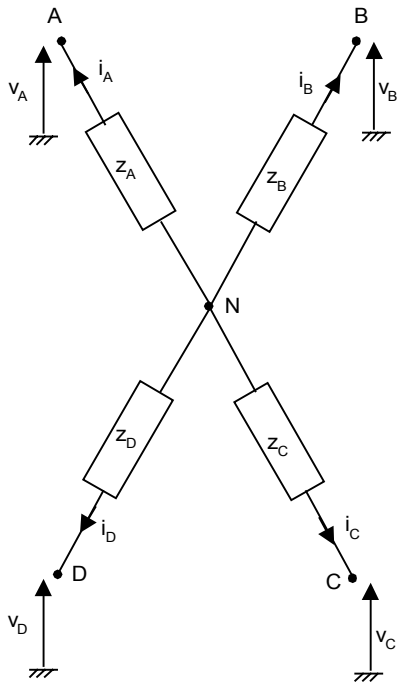
Le théorème s'énonce comme suit : le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau est égal au rapport des deux termes suivants :

- au numérateur, la somme des produits des potentiels des nœuds adjacents par les inductances reliant ces nœuds au nœud considéré
- au dénominateur, la somme de toutes les admittances connectées au nœud considéré.

$$v_N = \frac{\sum_i v_i Y_i}{\sum_i Y_i}$$

remarque : si un générateur de courant est connecté sur le nœud, il doit bien entendu être pris en compte.





Ce théorème est une conséquence directe de la loi des

nœuds de Kirchhoff :  $\sum_i i_i = 0$

$$i_A = \frac{v_N - v_A}{Z_A} \quad i_B = \frac{v_N - v_B}{Z_B}$$

$$i_C = \frac{v_N - v_C}{Z_C} \quad i_D = \frac{v_N - v_D}{Z_D}$$

$$i_A + i_B + i_C + i_D = 0$$

on a donc la relation suivante :

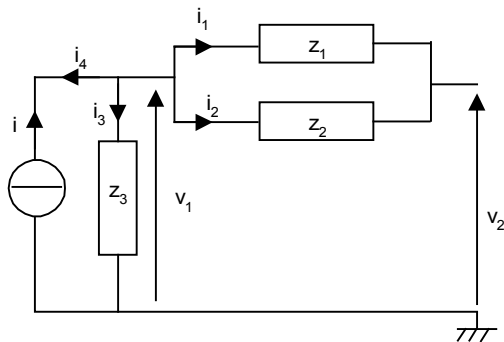
$$\frac{v_N - v_A}{Z_A} + \frac{v_N - v_B}{Z_B} + \frac{v_N - v_C}{Z_C} + \frac{v_N - v_D}{Z_D} = 0$$

en posant  $Y_i = \frac{1}{Z_i}$ , on obtient :

$$v_N(Y_A + Y_B + Y_C + Y_D) = v_A Y_A + v_B Y_B + v_C Y_C + v_D Y_D$$

$$v_N = \frac{v_A Y_A + v_B Y_B + v_C Y_C + v_D Y_D}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_D}$$

Exemple :



$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$\text{et } i_4 = -i$$

on a la relation suivante :

$$(v_1 - v_2)Y_1 + (v_1 - v_2)Y_2 + v_1 Y_3 - i = 0$$

et donc

$$v_1 = \frac{v_2(Y_1 + Y_2) + i}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

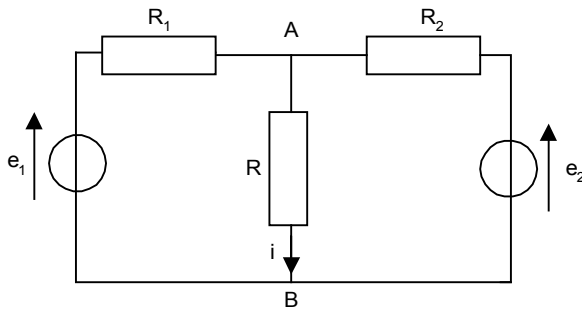
Le courant  $i$  du générateur de courant est compté positivement si il se dirige vers le noeud

#### 4.4 Théorème de superposition

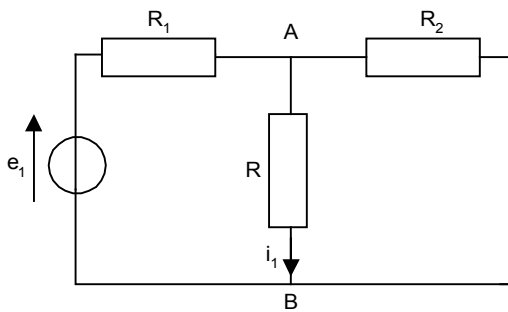
Ce théorème résulte des propriétés des circuits linéaires vus précédemment.

**Théorème :** si un circuit est soumis à plusieurs sources d'excitation, la réponse de ce circuit est égale à la somme algébrique des réponses à chacune des sources d'excitation prise séparément.

Exemple : soit le réseau suivant



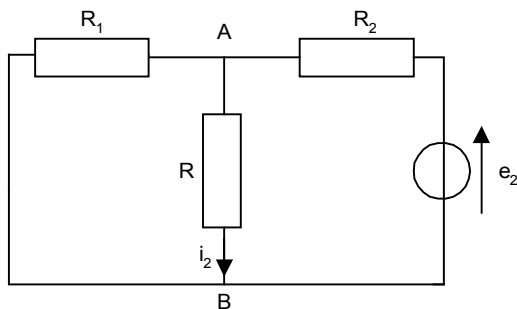
Nous allons décomposer ce réseau en autant de sous-réseau qu'il y a de générateurs. Dans cet exemple il y a deux générateurs. Pour chaque sous-réseau, on ne garde qu'un seul générateur ; les autres générateurs sont remplacés par des court-circuits si ce sont des générateurs de tension ou par des circuits ouverts si ce sont des générateurs de courant.



Dans ce premier sous-réseau nous avons remplacé  $e_2$  par un court-circuit.

$$v_{AB} = e_1 \frac{\frac{RR_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}}$$

$$i_1 = \frac{v_{AB}}{R} = e_1 \frac{\frac{R_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} = \frac{e_1 R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$



Dans le second sous-réseau nous avons remplacé  $e_1$  par un court-circuit.

$$v_{AB} = e_2 \frac{\frac{RR_1}{R+R_1}}{R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}}$$

$$i_2 = \frac{v_{AB}}{R} = e_2 \frac{\frac{R_1}{R+R_1}}{R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}} = \frac{e_2 R_1}{RR_2 + RR_1 + R_1 R_2}$$

En appliquant le théorème de superposition on obtient :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$

Application numérique :  $e_1=10V$ ,  $e_2=-20V$ ,  $R=5\Omega$ ,  $R_1=4\Omega$ ,  $R_2=6\Omega$ .

$$i_1 = 0.81A, \quad i_2 = -1.08A$$

$$i = i_1 + i_2 = -0.27A$$

remarque : dans ce cas simple, l'utilisation du théorème de Millman aurait fourni directement ce résultat.

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont des conséquences directes du théorème de superposition

## 4.5 Théorème de Thévenin et de Norton

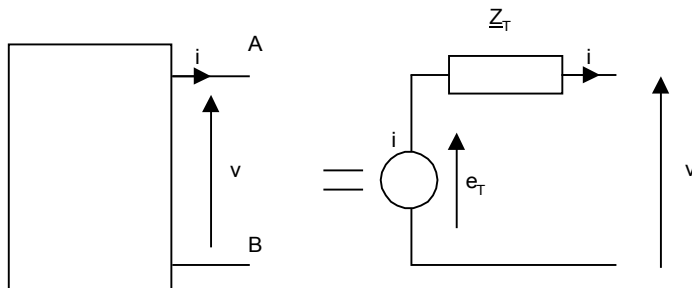
### 4.5.1 Grandeurs caractéristiques d'un dipôle

Un dipôle est caractérisé par trois grandeurs caractéristiques :

- différence de potentiel à vide :  $e_T$  lorsque  $i = 0$
- courant de court circuit :  $i_N$  lorsque  $v = 0$
- impédance de sortie :  $Z_T$

### 4.5.2 Théorème de Thévenin

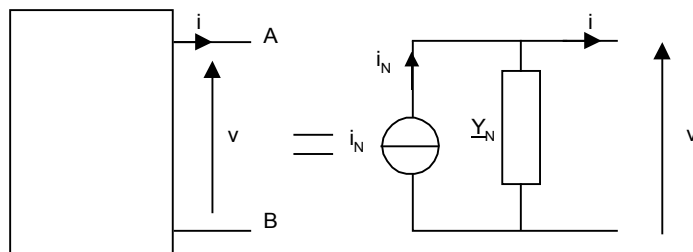
L'ensemble du circuit se trouvant à gauche des deux nœuds A et B peut être remplacé par un générateur de tension idéal de force électromotrice  $e_T$  en série avec une impédance interne  $Z_T$ .



La force électromotrice  $e_T$  est égale à la différence de potentiel  $v_{AB}$  mesurée à vide et l'impédance interne  $Z_T$  est l'impédance vue des bornes A et B lorsque l'on annule toutes les sources d'excitation du circuit (tous les générateurs de tension idéaux sont remplacés par des courts-circuits et les générateurs de courant idéaux sont remplacés par des circuits ouverts).

### 4.5.3 Théorème de Norton

L'ensemble du circuit se trouvant à gauche des deux nœuds A et B peut être remplacé par un générateur de courant  $i_N$  en parallèle avec une admittance  $Y_N$ .



Le théorème de Norton est le théorème dual du théorème de Thévenin.

Le courant  $i_N$  se mesure entre les bornes A et B en annulant toutes les sources d'excitation du circuit.

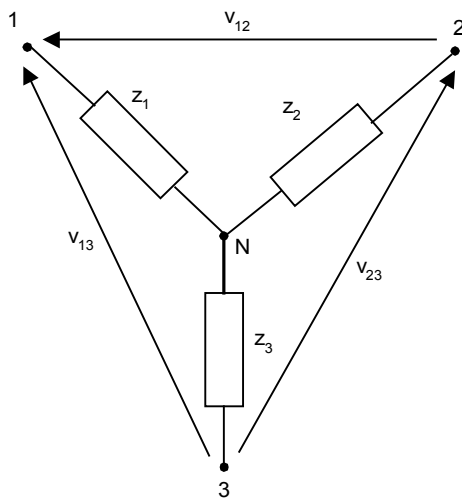
L'admittance  $Y_N$  est l'admittance vue des bornes A et B lorsque l'on annule toutes les sources d'excitation du circuit. On a :

$$Y_N = \frac{1}{Z_T}$$

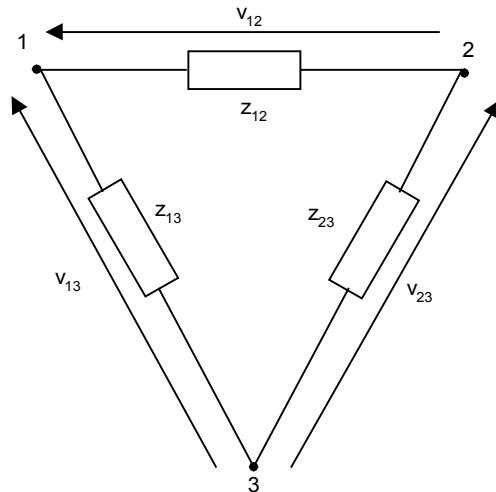
#### 4.6 Théorème de Kennely

Ce théorème permet de transformer pour un circuit tripôle un montage en étoile en un montage en triangle.

Montage étoile



Montage triangle



Cette transformation aussi utile dans l'étude des quadripôles comme les filtres en T et en  $\Pi$

#### Théorèmes :

Transformation triangle  $\Rightarrow$  étoile

$$Z_1 = \frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

Transformation étoile  $\Rightarrow$  triangle

$$Y_{12} = \frac{1}{Z_{12}} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

#### Démonstration du théorème de Kennely triangle vers étoile :

Appliquons la règle d'association des dipôles en série et en parallèle après avoir débranché le pôle 2 du circuit extérieur. On obtient la relation :

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (1)$$

En débranchant le pôle 3 du circuit extérieur, on obtient :

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_{12}(Z_{13} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (2)$$

En débranchant le pole 1 du circuit extérieur, on obtient :

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{23}(Z_{13} + Z_{12})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (3)$$

En sommant les équations (1), (2) et (3), on obtient :

$$2(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \frac{2(Z_{12}Z_{13} + Z_{12}Z_{23} + Z_{13}Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{12}Z_{13} + Z_{12}Z_{23} + Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (4)$$

En calculant (4)-(3) on a :

$$Z_1 = \frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

En calculant (4)-(1) on a :

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

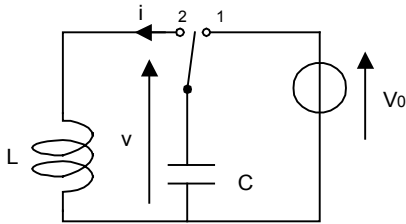
En calculant (4)-(2) on a :

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

## 5 FACTEUR DE QUALITE ET CIRCUIT RESONNANT

### 5.1 Oscillations libres dans un circuit LC

Soit le circuit composé d'une bobine et d'un condensateur parfait :



Considérons que l'interrupteur est dans la position 1 et que le condensateur est complètement chargé

$$W_{\text{emmagasinée}} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

A l'instant  $t=0$ , on commute l'interrupteur dans la position 2

On a la relation suivante :

$$i = \frac{1}{L} \int v dt = -C \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{LC} v = 0$$

Une solution à cette équation est de la forme

$$v = V \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ est la pulsation propre du circuit LC}$$

A l'instant  $t=0$ , on a  $v(t=0) = V_0$  et  $i(t=0) = 0$

$$i = -C \frac{dv}{dt} = C \omega V \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t=0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$v(t=0) = V_0 \Rightarrow V = V_0$$

Ainsi, on a donc les expressions suivantes :

$$v = V_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i = C \omega V_0 \sin(\omega t)$$

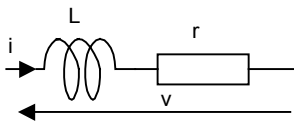
Comme dans le cas du circuit LC série, le circuit LC parallèle parfait entretient donc les oscillations sans amortissement.

En pratique, les bobines réels contiennent une faible résistance en série et les oscillations sont amorties à cause des pertes par effet Joules.

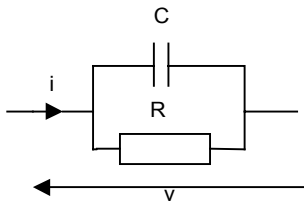
## 5.2 Facteur de qualité d'un circuit

### 5.2.1 Définition

En pratique, les bobines réels contiennent une faible résistance en série (résistance du fil bobiné)



Les condensateurs réels possèdent également une résistance parallèle de forte valeur qui caractérise les pertes diélectriques (courants de fuites)



Plus faibles seront les pertes meilleur sera l'élément.

On définit le facteur de qualité d'un élément Q comme suit :

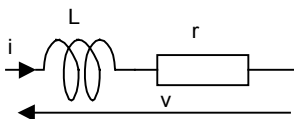
$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie maximale emmagasinée}}{\text{énergie dissipée par période}}$$

Le facteur de qualité est sans unité. L'énergie est emmagasinée dans les éléments réactifs (bobine ou condensateur) et l'énergie est dissipée par effet Joule (résistance).

### 5.2.2 Facteur de qualité d'un élément réactif réel

Cas de la bobine réelle :

Une bobine réelle est composée d'une bobine pure en série avec une résistance de faible valeur.



soit le courant  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  circulant dans ce circuit.

Nous avons vu dans le chapitre « Puissance et Energie » que la quantité maximale d'énergie que peut emmagasiner une bobine est :

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joules pendant une période T ( avec  $\omega = 2\pi / T$  ) est égale à :

$$W_D = \frac{1}{2} r I_0^2 T$$

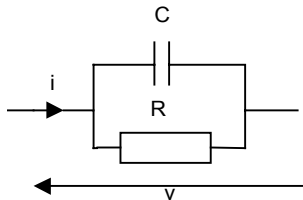
On a donc :

$$Q_L = 2\pi \frac{W_L}{W_D} = 2\pi \frac{LI_0^2}{2} \cdot \frac{2}{rI_0^2 T} = \frac{2\pi L}{rT} = \frac{L\omega}{r}$$

Plus la résistance  $r$  est petite, plus le facteur de qualité  $Q_L$  de la bobine réelle est grand.

Cas du condensateur réel :

Un condensateur réel est composée d'un condensateur parfait en parallèle avec une résistance de forte valeur.



soit la différence de potentiel  $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$  aux bornes de ce circuit.

Nous avons vu dans le chapitre « Puissance et Energie » que la quantité maximale d'énergie que peut emmagasiner un condensateur est :

$$W_C = \frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

Comme on a  $V_0 = \frac{I_0}{C\omega}$ , l'énergie  $W_C$  peut aussi s'écrire :

$$W_C = \frac{CV_0^2}{2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joules pendant une période T ( avec  $\omega = 2\pi / T$  ) est égale à :

$$W_D = \frac{1}{2} R I_0^2 T = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} T$$

On a donc :

$$Q_C = 2\pi \frac{W_C}{W_D} = 2\pi \frac{CV_0^2}{2} \cdot \frac{2R}{V_0^2 T} = \frac{2\pi CR}{T} = RC\omega$$

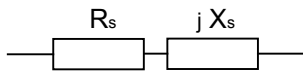


Plus la résistance  $R$  est grande, plus le facteur de qualité  $Q_C$  du condensateur réel est grand.

La notion de facteur de qualité peut être étendue à tout type de circuit associant une résistance et une bobine ou un condensateur

### 5.2.3 Généralisation du facteur de qualité

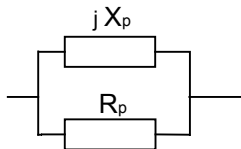
Soit un circuit série dont l'impédance est de la forme  $\underline{Z} = R_s + jX_s$



Le facteur de qualité de ce circuit est :

$$Q = \frac{|X_s|}{R_s}$$

Soit un circuit parallèle dont l'admittance est de la forme  $\underline{Y} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}$



le facteur de qualité de cette impédance est :

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|}$$

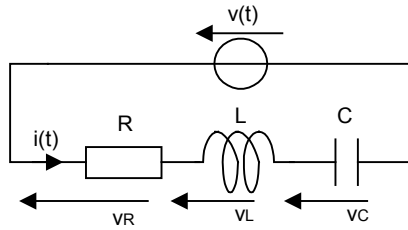
On peut vérifier que les expressions obtenues précédemment se déduisent directement de ces deux formules générales.

Exemple : association d'une bobine d'inductance  $L$  et d'une résistance  $R$  en série

On a :  $R_s = R$  et  $X_s = L\omega$ , le facteur de qualité est égal à  $Q = \frac{|X_s|}{R_s} = \frac{L\omega}{R}$

### 5.3 Le circuit résonnant série

Soit l'association en série d'une bobine d'un condensateur et d'une résistance :



Le générateur  $v(t)$  impose la pulsation  $\omega$  du circuit.

L'impédance complexe est la suivante :

$$\underline{Z} = \frac{v}{i} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Son module est égal à :

$$|\underline{Z}| = R \sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Sa phase est la suivante :

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

A la pulsation de résonance  $\omega_0$ , le courant est maximum et donc le module de l'impédance complexe est le plus faible possible. Cette pulsation s'obtient pour

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow LC\omega_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On a alors,  $\underline{Z} = R$ .

$i$  et  $v$  sont donc en phase.

Nous avons vu que le facteur de qualité d'une bobine en série avec une résistance  $R$  est égal à  $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$

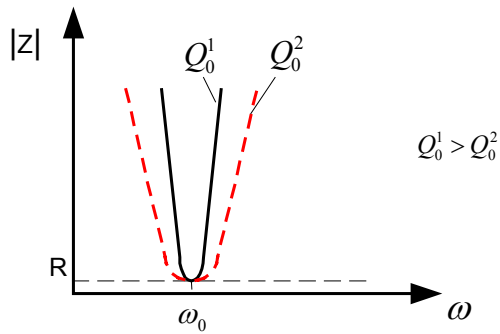
$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Cherchons à exprimer  $\underline{Z}$  en fonction de  $\omega, \omega_0, R$  et  $Q_0$  :

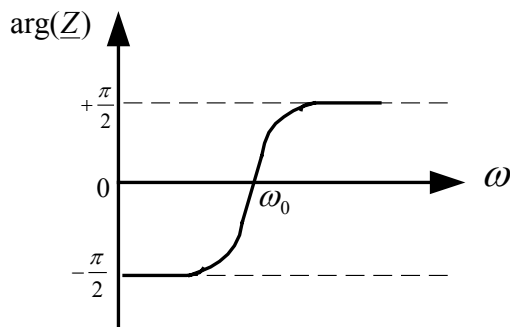
$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\left(1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = R\left(1 + j\frac{L\omega_0}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{LC\omega_0^2\omega}\right)\right)$$

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \quad \text{car} \quad \omega_0 = \frac{1}{LC\omega_0}$$

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0, & \quad |Z| \rightarrow +\infty & \arg(Z) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ \omega = \omega_0, & \quad |Z| = R & \arg(Z) = 0 \\ \omega \rightarrow +\infty, & \quad |Z| \rightarrow +\infty & \arg(Z) \rightarrow +\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$|Z| = R \sqrt{1 + Q_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$



$$\arg(Z) = \arctan Q_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

L'étude d'un tel circuit est intéressante lorsque la pulsation  $\omega$  est proche de la pulsation de la résonance  $\omega_0$   
 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  (avec  $\delta\omega$  très petit devant  $\omega_0$ )

Calculons alors le terme  $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0 \omega} \approx \frac{2\omega_0 \delta\omega}{\omega_0 \omega}$$

On a donc

$$\underline{Z} = R \left( 1 + jQ_0 \frac{2\delta\omega}{\omega_0} \right) \quad \text{lorsque } \omega \text{ proche de } \omega_0$$

$\frac{\delta\omega}{\omega_0}$  est le désaccord relatif (écart de pulsation par rapport à la pulsation  $\omega_0$ )

Si le facteur de qualité  $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$  est très élevé (c'est à dire  $R \ll L\omega_0$ ), le circuit est équivalent à un interrupteur ouvert (hors résonance) ou fermé (en résonance).

Calculons la puissance consommée dans le circuit au voisinage de la résonance lors d'une attaque en tension  $\underline{v}(t) = V_0 \exp(j\omega t)$

$$P = \frac{1}{4}(\underline{v}^* \underline{i} + \underline{v} \underline{i}^*) \text{ et } \underline{i}(t) = \frac{\underline{v}}{\underline{Z}}$$

On a alors :

$$P = \frac{1}{4} \left( \underline{v}^* \cdot \frac{\underline{v}}{\underline{Z}} + \underline{v} \cdot \frac{\underline{v}^*}{\underline{Z}^*} \right) = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}^*}{4} \left( \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}^*} \right) = \frac{V_0^2}{4} \left( \frac{\underline{Z}^* + \underline{Z}}{\underline{Z} \underline{Z}^*} \right) = \frac{V_0^2}{4} \frac{2R}{|\underline{Z}|^2}$$

$$\text{avec } |\underline{Z}|^2 = R^2 \left( 1 + Q_0^2 \frac{4\delta\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

On obtient finalement :

$$P = \frac{V_0^2}{2R} \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Pour  $\omega = \omega_0$   $P = P_0 = \frac{V_0^2}{2R}$  : puissance consommée dans la résistance

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Déterminons les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour lesquelles  $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2}$

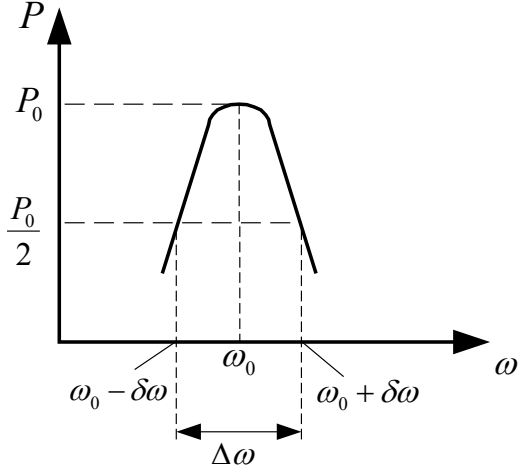
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}} \Leftrightarrow 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{2Q_0}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0} = \omega_0 - \delta\omega$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q_0} = \omega_0 + \delta\omega$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\delta\omega$$



$\Delta\omega$  est appelée bande passante ou largeur de bande à -3 dB. C'est l'intervalle de pulsation pour lequel la puissance est supérieure à  $P_0/2$ .  
Phénomène de surtension :

Lorsque  $\omega = \omega_0$ , les différences de potentiel aux bornes de la bobine et du condensateur peuvent être très grandes :

$$\omega = \omega_0 \text{ on a } Z = R$$

$$\text{et donc } \underline{i}(t) = \frac{\underline{v}}{Z} = \frac{V_0}{R} \exp(j\omega_0 t)$$

$$\underline{v}_L = jL\omega_0 \underline{i} = jL\omega_0 \frac{V_0}{R} \exp(j\omega_0 t) = jQ_0 V_0 \exp(j\omega_0 t) = jQ_0 \underline{v}$$

$$\underline{v}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega_0} = \frac{V_0}{jRC\omega_0} \exp(j\omega_0 t) = -jV_0 Q_0 \exp(j\omega_0 t) = -jQ_0 \underline{v}$$

$$\underline{v}_R = R \underline{i} = \underline{v}$$

$$\text{On a bien : } \underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L + \underline{v}_C$$

$\underline{v}_L$  et  $\underline{v}_C$  sont de même amplitude  $V_0 Q_0$  et en opposition de phase à la pulsation de résonance. Si le facteur de qualité est grand, l'amplitude  $V_0 Q_0$  peut aussi être élevée d'où risque de claquage du condensateur !

Application numérique :

$$R = 5\Omega, L=1\text{mH et } C=1\text{nF. } V_0 = 10 \text{ V}$$

$$\text{On a } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rd / s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 159\text{kHz}$$

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 200$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = 5000 \text{rd} / \text{s}$$

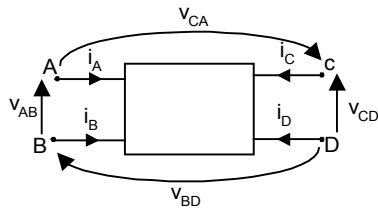
$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 795 \text{Hz}$$

$$|V_c| = |V_L| = Q_0 V_0 = 2000 \text{V} !!$$

## 6 LES QUADRIPOLES

### 6.1 Définitions

D'une manière générale, un quadripôle est décrit comme suit :

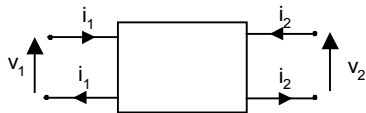


On a :

$$i_A + i_B + i_C + i_D = 0$$

$$v_{AB} + v_{CA} - v_{CD} + v_{BD} = 0$$

Cependant, le terme quadripôle est plutôt utilisé pour un circuit dont les bornes sont groupées par paire. Alors le courant entrant dans le pôle d'une paire ressort par l'autre pôle de la même paire. Nous avons le schéma équivalent suivant :



### 6.2 Description matricielle du quadripôle

Pour relier les 4 paramètres du quadripôle ( les deux courants et les deux différences de potentiel), il existent 4 représentations matricielles différentes:

- matrices impédances
- matrices admittances
- matrices hybrides
- matrices de transfert

#### 6.2.1 Matrices impédances

2 équations sont suffisantes pour décrire le quadripôle

On a :

$$v_1 = f(i_1, i_2)$$

$$v_2 = g(i_1, i_2)$$

Les deux équations sont :

$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$$

L'unité des impédances  $Z_{ij}$  sont les ohms ( $\Omega$ ). L'indice i est relatif à la tension et indice j est relatif au courant.

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{i}$$

$\mathbf{v}$  est le vecteur colonne des tensions et  $\mathbf{i}$  est le vecteur colonne des courants.

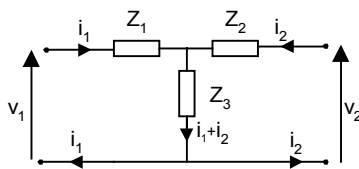
$\mathbf{Z}$  est la matrice impédance de dimension 2x2

**Définition 1 :** un quadripôle est dit réciproque si les termes de la seconde diagonale sont égaux :  $Z_{12} = Z_{21}$ . Cette propriété est caractéristique des quadripôles réciproques composés d'éléments passifs (sans générateur de courant et de tension).

**Définition 2 :**

Si de plus, les termes de la première diagonale sont égaux :  $Z_{11} = Z_{22}$ , on dit que le quadripôle est symétrique.

**Exemple 1 :** quadripôle en T



Nous avons les deux relations suivantes en appliquant la loi des mailles :

$$v_1 = Z_1i_1 + Z_3(i_1 + i_2) = (Z_1 + Z_3)i_1 + Z_3i_2$$

$$v_2 = Z_2i_2 + Z_3(i_1 + i_2) = Z_3i_1 + (Z_2 + Z_3)i_2$$

Ainsi, on a :



$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

Ce quadripôle est réciproque. Il est symétrique à la condition que  $Z_2 = Z_1$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice impédance.

$$Z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

$Z_{11}$  est l'impédance vue de l'entrée en laissant la sortie du quadripôle en circuit ouvert ( $i_2 = 0$ )

$$Z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$Z_{22}$  est l'impédance vue de la sortie en laissant l'entrée du quadripôle en circuit ouvert ( $i_1 = 0$ )

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0}$$

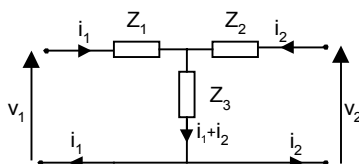
$Z_{12}$  est l'impédance de transfert inverse ou transimpédance inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert ( $i_1 = 0$ )

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

$Z_{21}$  est l'impédance de transfert directe ou transimpédance obtenue avec la sortie du quadripôle en circuit ouvert ( $i_2 = 0$ )

Ces définitions des coefficients permettent de calculer et de mesurer simplement ceux-ci.

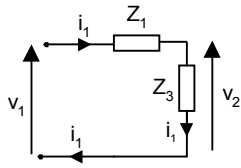
**Exemple 1** : (suite) quadripôle en T



cas  $i_2 = 0$

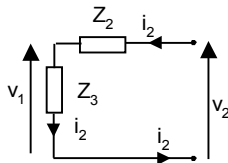
$$Z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = Z_3$$



cas  $i_2 = 0$

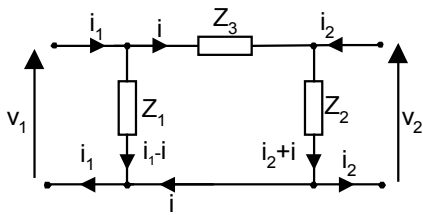
$$Z_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1 = 0} = Z_3$$



$$Z_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1 = 0} = Z_2 + Z_3$$

Nous retrouvons les résultats calculés précédemment.

**Exemple 2** : quadripôle en pi

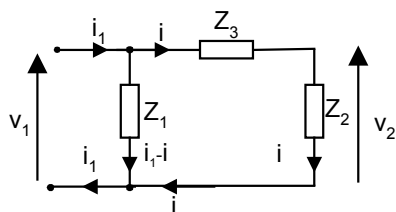


$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$$

Comme dans l'exemple précédent, nous allons considérer successivement les cas  $i_2 = 0$  et  $i_1 = 0$ .

cas  $i_2 = 0$



$$Z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2 = 0} = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre  $i$  et  $i_1$ .

On a :

$$v_1 = Z_1(i_1 - i) = (Z_3 + Z_2)i$$

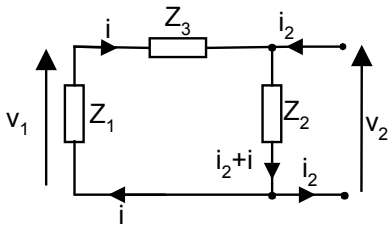
Soit

$$\frac{i_1}{i} = \frac{Z_3 + Z_2 + Z_1}{Z_1}$$

D'où

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = \left. \frac{v_2}{i} \frac{i}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1}$$

cas  $i_1 = 0$



$$Z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = Z_2 \quad // \quad (Z_1 + Z_3) = \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre  $i$  et  $i_2$ .

On a :

$$v_2 = Z_2(i_2 + i) = -(Z_3 + Z_1)i$$

Soit

$$\frac{i_2}{i} = -\frac{Z_3 + Z_2 + Z_1}{Z_2}$$

D'où

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{v_1 i}{i i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1}$$

En résumé, nous avons :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} & \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} \\ \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} & \frac{Z_2(Z_1+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} \end{bmatrix}$$

Le quadripôle est donc réciproque. Il est symétrique si

$$\begin{aligned} Z_1(Z_2 + Z_3) &= Z_2(Z_1 + Z_3) \\ \Leftrightarrow Z_1 &= Z_2 \end{aligned}$$

### 6.2.2 Matrices admittances

On utilise les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2$$

$$i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2$$

L'unité des admittances  $Y_{ij}$  sont les ohms<sup>-1</sup> ( $\Omega^{-1}$ ). L'indice i est relatif au courant et indice j est relatif à la tension.

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v}$$

$\mathbf{i}$  est le vecteur colonne des courants et  $\mathbf{v}$  est le vecteur colonne des tensions.

$\mathbf{Y}$  est la matrice admittance de dimension 2x2

On a la relation suivante entre  $\mathbf{Y}$ , la matrice admittance et  $\mathbf{Z}$ , la matrice impédance d'un quadripôle.

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$$

La matrice  $\mathbf{Y}$  est l'inverse de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Le passage de l'une à l'autre implique d'inverser la matrice (voir cours de mathématiques sur les matrices).

On a les relations entre les éléments de la matrice admittance  $\mathbf{Y}$  et la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  :

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice admittance.

$$Y_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$Y_{11}$  est l'admittance vue de l'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$Y_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1 = 0}$$

$Y_{22}$  est l'admittance vue de la sortie lorsque l'entrée du quadripôle est en court-circuit ( $v_1 = 0$ )

$$Y_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1 = 0}$$

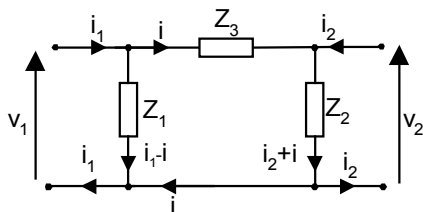
$Y_{12}$  est l'admittance de transfert inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en court-circuit ( $v_1 = 0$ )

$$Y_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$Y_{21}$  est l'admittance de transfert directe obtenue avec la sortie du quadripôle en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

Ces définitions des coefficients permettent de calculer et de mesurer simplement ceux-ci.

**Exemple 2** : (suite) quadripôle en pi



Soit  $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$ ,  $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$  et  $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$ ,

Soit  $i$  le courant circulant dans l'admittance  $Y_3$ .

On a  $i = Y_3(v_1 - v_2)$

Les équations associées à la matrice admittance sont les suivantes :

$$i_1 = Y_1 v_1 + i = (Y_1 + Y_3)v_1 - Y_3 v_2$$

$$i_2 = Y_2 v_2 - i = -Y_3 v_1 + (Y_2 + Y_3)v_2$$

D'où les éléments de la matrice admittance suivants :

$$Y_{11} = Y_1 + Y_3 \quad Y_{12} = Y_{21} = -Y_3 \quad \text{et} \quad Y_{22} = Y_2 + Y_3$$

Ces éléments de la matrice admittance peuvent être vérifiés en utilisant les relations entre les éléments de la matrice admittance  $\mathbf{Y}$  et ceux de la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  calculés au paragraphe précédent.

### 6.2.3 Matrices hybrides

On utilise les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{H}$  est la matrice hybride de dimension 2x2

Les matrices hybrides sont utilisées en particulier dans l'étude des transistors.

Nous avons :

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$h_{11}$  est l'impédance d'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$h_{12}$  est le gain en tension inverse lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ( $i_1 = 0$ )

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

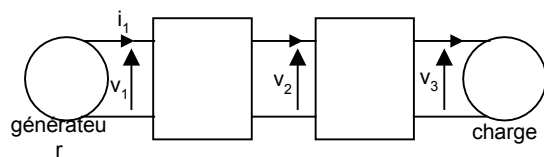
$h_{21}$  est le gain en courant obtenu avec la sortie du quadripôle en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$h_{22}$  est l'admittance de sortie lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ( $i_1 = 0$ )

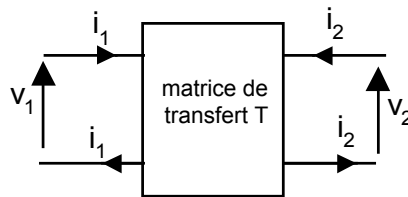
### 6.2.4 Matrice de transfert ou matrice chaîne

Cette matrice est très pratique pour la mise en cascade des quadripôles.



Les relations définissant la matrice de transfert **T** sont les suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= Av_2 - Bi_2 \\ i_1 &= Cv_2 - Di_2 \end{aligned}$$



Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Attention : contrairement aux autres représentations matricielles, pour la matrice de transfert **T** on utilise le courant  $-i_2$  (courant sortant du quadripole) à la place du courant  $i_2$  (courant entrant dans le quadripole). Ce formalisme permet de simplifier les calculs lorsque nous associerons plusieurs quadripôles en cascade.

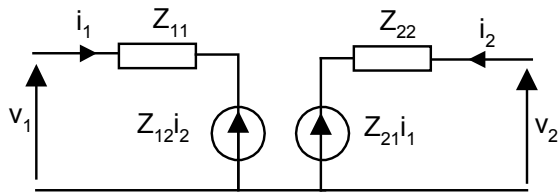
A et D sont sans dimension

B est une impédance en ohm et C une admittance en ohm<sup>-1</sup>

### 6.3 Schémas équivalents du quadripôle

Ces schémas se déduisent directement des relations matricielles impédance, admittance et hybride.

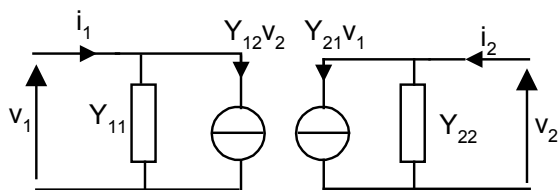
### 6.3.1 Représentation matricielle impédance



$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$$

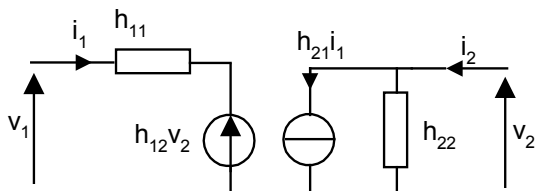
### 6.3.2 Représentation matricielle admittance



$$i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2$$

$$i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2$$

### 6.3.3 Représentation matricielle hybride



$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

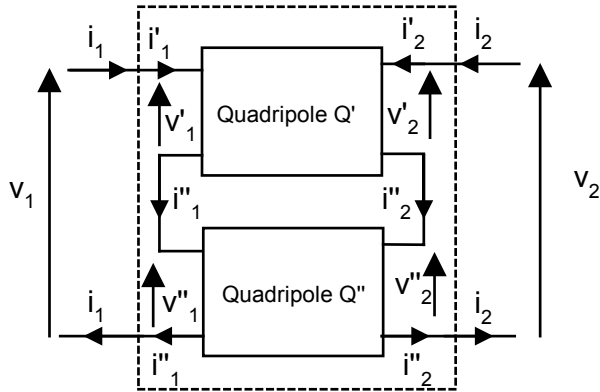
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

## 6.4 Association de quadripôles

Suivant l'association de quadripôles, nous choisirons la matrice la plus appropriée.

### 6.4.1 Association série





On a les relations suivantes :

$$v_1 = v'_1 + v''_1 \quad \text{et} \quad v_2 = v'_2 + v''_2$$

$$\begin{cases} v'_1 = Z'_{11} i'_1 + Z'_{12} i'_2 \\ v'_2 = Z'_{21} i'_1 + Z'_{22} i'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v''_1 = Z''_{11} i''_1 + Z''_{12} i''_2 \\ v''_2 = Z''_{21} i''_1 + Z''_{22} i''_2 \end{cases}$$

Comme  $i_1 = i'_1 = i''_1$  et  $i_2 = i'_2 = i''_2$  nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripole équivalent :

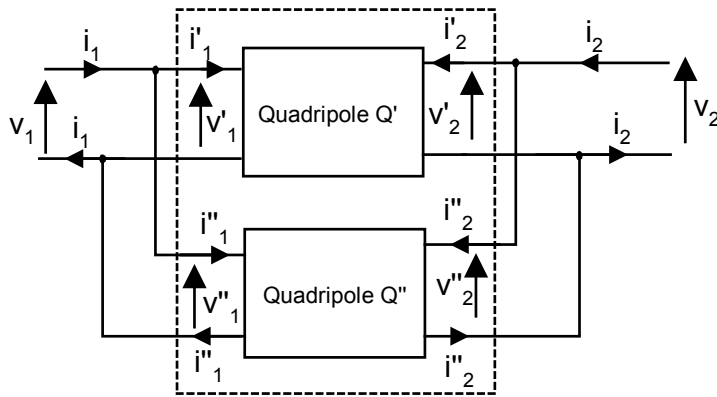
$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 = (Z'_{11} + Z''_{11}) i_1 + (Z'_{12} + Z''_{12}) i_2 \\ v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = (Z'_{21} + Z''_{21}) i_1 + (Z'_{22} + Z''_{22}) i_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice impédance du quadripole équivalent est égal à la somme des matrices impédances :

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}'] + [\mathbf{Z}'' ]$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

### 6.4.2 Association parallèle



On a les relations suivantes :

$$i_1 = i'_1 + i''_1 \quad \text{et} \quad i_2 = i'_2 + i''_2$$

$$\begin{cases} i'_1 = Y'_{11} v'_1 + Y'_{12} v'_2 \\ i'_2 = Y'_{21} v'_1 + Y'_{22} v'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} i''_1 = Y''_{11} v''_1 + Y''_{12} v''_2 \\ i''_2 = Y''_{21} v''_1 + Y''_{22} v''_2 \end{cases}$$

Comme  $v_1 = v'_1 = v''_1$  et  $v_2 = v'_2 = v''_2$  nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripôle équivalent :

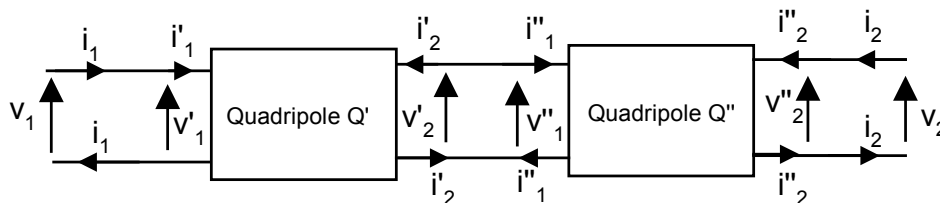
$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 = (Y'_{11} + Y''_{11}) v_1 + (Y'_{12} + Y''_{12}) v_2 \\ i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 = (Y'_{21} + Y''_{21}) v_1 + (Y'_{22} + Y''_{22}) v_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice admittance du quadripôle équivalent est égal à la somme des matrices admittances :

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}'] + [\mathbf{Y}'']$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

### 6.4.3 Association en cascade



Nous allons chercher à déterminer la matrice de transfert du quadripôle résultant de cette association.

Chaque quadripôle est défini par sa matrice de transfert :

$$\text{Quadripôle } Q' : \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \quad \text{Quadripôle } Q'' : \mathbf{T}'' = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

Dans cette association, nous avons les relations suivantes entre les courants et entre les différences de potentiel :

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 \\ i''_1 &= -i'_2 \\ i''_2 &= i_2 \\ v_1 &= v'_1 \\ v'_2 &= v''_1 \\ v''_2 &= v_2 \end{aligned}$$

On a donc les relations suivantes pour le premier quadripôle :

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 = A'v'_2 - B'i'_2 = A'v''_1 + B'i''_1 \\ i_1 &= i'_1 = C'v'_2 - D'i'_2 = C'v''_1 + D'i''_1 \end{aligned}$$

Pour le second quadripôle, nous avons :

$$\begin{aligned} v'_2 &= v''_1 = A''v''_2 - B''i''_2 = A''v_2 - B''i_2 \\ -i'_2 &= i''_1 = C''v''_2 - D''i''_2 = C''v_2 - D''i_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} v_1 &= A'(A''v''_2 - B''i''_2) + B'(C''v''_2 - D''i''_2) \\ i_1 &= C'(A''v''_2 - B''i''_2) + D'(C''v''_2 - D''i''_2) \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit les relations entre  $v_1, i_1, v_2$  et  $i_2$  :

$$\begin{aligned} v_1 &= (A'A'' + B'C'')v_2 - (A'B'' + B'D'')i_2 \\ i_1 &= (C'A'' + D'C'')v_2 - (C'B'' + D'D'')i_2 \end{aligned}$$

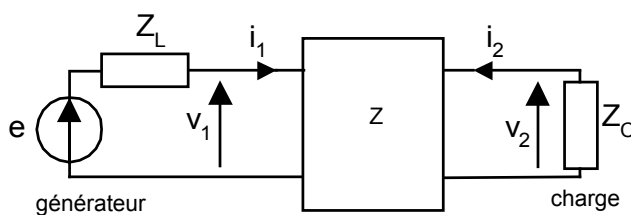
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{T}$  du quadripôle  $Q$  obtenu par la mise en cascade de deux quadripôles  $Q'$  et  $Q''$  est égale au produit matriciel des matrices  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{T}''$  :

$$[T] = [T'] [T'']$$

Toutes ces associations de quadripôles se généralisent à un nombre  $n$  de quadripôles.

## 6.5 Fonctions de transfert d'un quadripôle



En utilisant la matrice impédance, on a les relations suivantes :

$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 \quad \text{equation (1)}$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 \quad \text{equation (2)}$$

$$e = Z_L i_1 + v_1 \quad \text{equation (3)}$$

$$v_2 = -Z_C i_2 \quad \text{equation (4)}$$

Les grandeurs intéressantes sont :

$$T_v = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{gain en tension du quadripole. Ce gain est sans dimension (réel ou complexe)}$$

$T_C$  est toujours inférieur à 1 pour un quadripole passif.

$$T_i = \frac{i_2}{i_1} \quad \text{gain en courant}$$

$$Z_E = \frac{v_1}{i_1} \quad \text{impédance d'entrée}$$

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2} \quad \text{impédance de sortie}$$

- Gain en courant

$$T_i = \frac{i_2}{i_1}$$

En combinant les équations (2) et (4), on obtient :  $-Z_C i_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$

D'où :

$$\boxed{T_i = \frac{i_2}{i_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}}} \quad \text{equation (5)}$$

On peut observer que le gain en courant dépend de la charge  $Z_C$

- Gain en tension

$$T_v = \frac{v_2}{v_1}$$

On va exprimer  $v_1$  en fonction de  $v_2$  à partir des équations (1),(4) et (5).

$$(4) \Rightarrow i_2 = -\frac{v_2}{Z_C}$$

$$(5) \Rightarrow i_1 = -\frac{Z_C + Z_{22}}{Z_{21}} i_2 = -\frac{Z_C + Z_{22}}{Z_{21}} \frac{v_2}{Z_C}$$

$$(1) \Rightarrow v_1 = -Z_{11} \frac{Z_C + Z_{22}}{Z_{21}} \frac{v_2}{Z_C} - \frac{Z_{12}}{Z_C} v_2 = \frac{v_2}{Z_C Z_{21}} [Z_{11}(Z_C + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}]$$

En posant  $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  ( $\Delta Z$  est le déterminant de la matrice impédance  $Z$ )

On obtient finalement :

$$\boxed{T_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_C Z_{21}}{Z_{11}Z_C + \Delta Z}}$$

- Impédance d'entrée

$Z_E = \frac{v_1}{i_1}$  c'est l'impédance vue de l'entrée du quadripole

$$(1) \Rightarrow v_1 = Z_{11}i_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1 = \frac{Z_{11}(Z_C + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1$$

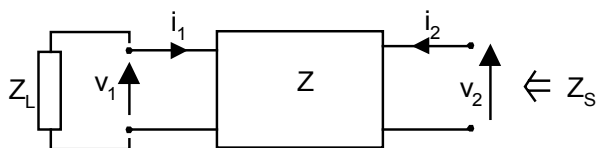
$$\boxed{Z_E = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_C Z_{11} + \Delta Z}{Z_C + Z_{22}}}$$

- Impédance de sortie

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2}$$

C'est l'impédance vue de la sortie du quadripole obtenue en annulant le générateur à l'entrée du quadripole.

Pour déterminer cette impédance, il convient d'annuler le générateur



$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow v_1 = -Z_L i_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$i_1 = -\frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_L} i_2$$

$$(2) \Rightarrow v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 = -\frac{Z_{21}Z_{12}i_2}{Z_{11} + Z_L} + Z_{22}i_2 = \left( \frac{-Z_{21}Z_{12} + Z_{11}Z_{22} + Z_L Z_{22}}{Z_{11} + Z_L} \right) i_2$$

$$\boxed{Z_S = \frac{v_2}{i_2} = \frac{Z_L Z_{22} + \Delta Z}{Z_{11} + Z_L}}$$



## 7 FILTRAGE, DIAGRAMMES DE BODE

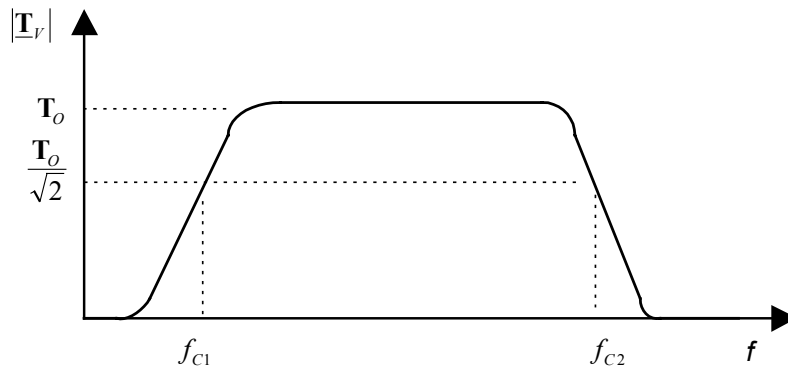
### 7.1 Introduction au filtrage

En régime sinusoïdal permanent nous avons vu que les impédances des bobines et des condensateurs dépendent de la fréquence. Par conséquent, les coefficients des différentes matrices de définition des quadripôles (matrice impédance  $\mathbf{Z}$ , admittance  $\mathbf{Y}$ , hybride  $\mathbf{H}$  ou de transfert  $\mathbf{T}$ ), les fonctions de transfert ( $\mathbf{T}_V$  et  $\mathbf{T}_I$ ) et les impédances d'entrée  $\mathbf{Z}_E$  et de sortie  $\mathbf{Z}_S$  sont aussi dépendantes de la fréquence. Nous allons utiliser cette dépendance pour construire des filtres.

#### 7.1.1 Définitions

Un filtre est un quadripôle transmettant un signal sans atténuation ou avec une atténuation de valeur donnée dans une bande de fréquence déterminée.

Courbe de réponse en fréquence du module de la fonction de transfert  $\mathbf{T}_V = \frac{v_2}{v_1}$  d'un quadripôle :

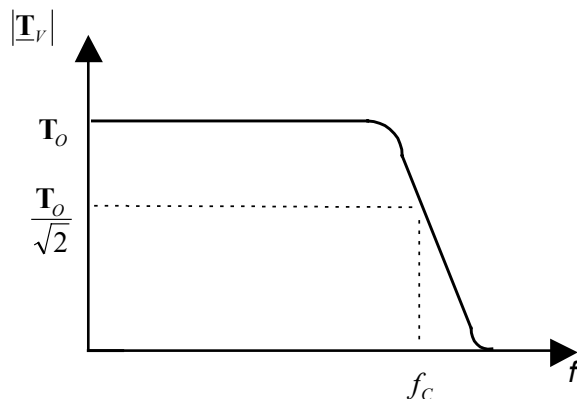


Les fréquences de coupure  $f_{C1}$  et  $f_{C2}$  correspondent aux fréquences pour lesquelles le module de la fonction

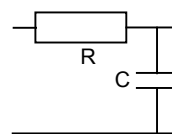
de transfert  $|\mathbf{T}_V| = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$

Il existe différentes catégories de filtres selon l'allure de leur courbe de réponse en fréquence :

- le filtre passe bas



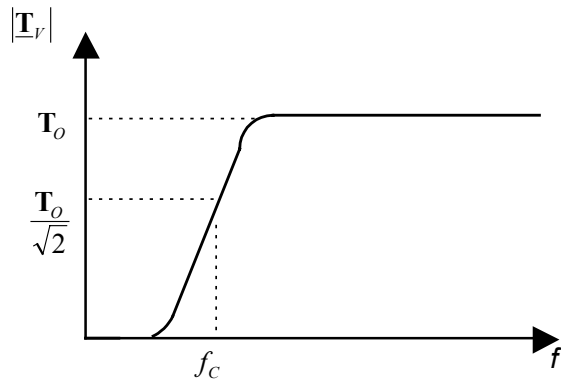
Exemple :



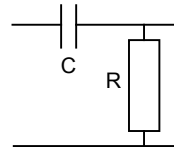
La pente de la courbe de réponse dépend de l'ordre du filtre.

La bande passante est égale à  $f_C$

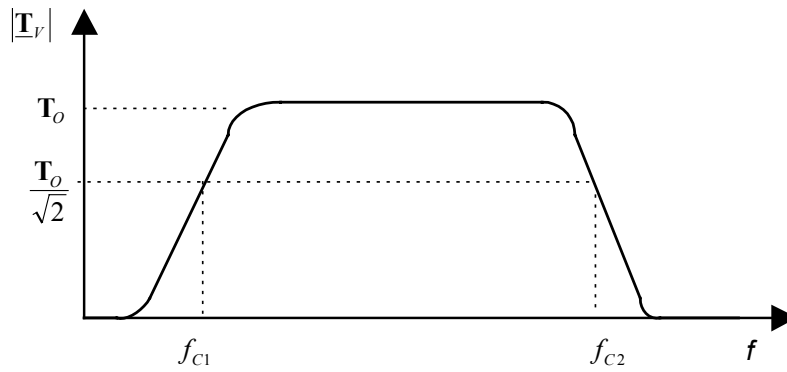
- le filtre passe haut



Exemple :

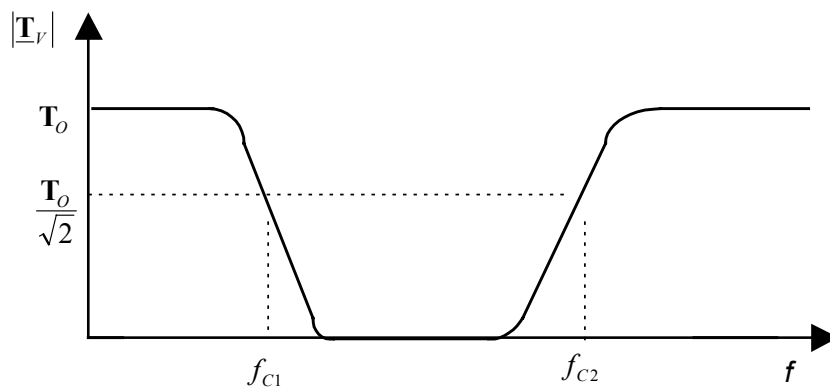


- le filtre passe-bande



La bande passante est égale à  $f_{c2} - f_{c1}$

- le filtre coupe-bande





## 7.2 Echelle logarithmique et diagramme de Bode

L'étude des filtres portent sur la fonction de transfert complexe  $\underline{\mathbf{T}}_V$  qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{T}}_V = |\underline{\mathbf{T}}_V| \exp(j\varphi)$$

Le module  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  et la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $\underline{\mathbf{T}}_V$  sont fonction de la pulsation  $\omega = 2\pi f$   
On a :

$$|\underline{\mathbf{T}}_V|(\omega) = \frac{|v_2|}{|v_1|}$$

et

$$\varphi(\omega) = \arg(v_2) - \arg(v_1)$$

Au lieu d'étudier les courbes de réponse en fréquence du module de la fonction de transfert  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$ , on préfère étudier le gain  $G_V$  obtenu à partir de  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  par changement d'échelle :

$$G_V = 20 \log_{10} |\underline{\mathbf{T}}_V|$$

Ce changement d'échelle est résumé sur ce tableau :

$A$	0	$10^{-n}$	...	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0,1	$1/\sqrt{2}$	1	10	$10^2$	$10^3$	...	$10^n$	$+\infty$
$\log_{10} A$	$-\infty$	-n	...	-3	-2	-1	-0,15	0	+1	+2	+3	...	+n	$+\infty$
$20 \log_{10} A$	$-\infty$	-20n	...	-60	-40	-20	-3	0	+20	+40	+60	...	+20n	$+\infty$

Ce changement d'échelle permet d'étaler les amplitudes de faibles valeurs.

Bien que comme  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  le gain  $G_V$  soit sans dimension, on utilise le mot « décibel » pour signifier que l'on a réalisé le changement d'échelle  $20 \log_{10} ( )$

Note : on utilise aussi le décibel pour exprimer les puissances : la puissance en Décibel Watt (dBW) s'exprime comme suit en fonction de la puissance en Watt  $P$  :

$$P_{dB} = 10 \log_{10} P$$

Nous avons vu précédemment que la fréquence de coupure correspond à la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert  $|\underline{\mathbf{T}}_V| = \frac{\mathbf{T}_0}{\sqrt{2}}$ . En utilisant la relation entre  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  et  $G_V$  on a :

$$G_V = 20 \log_{10} \mathbf{T}_0 - 20 \log_{10} \sqrt{2} = G_0 - 3dB$$

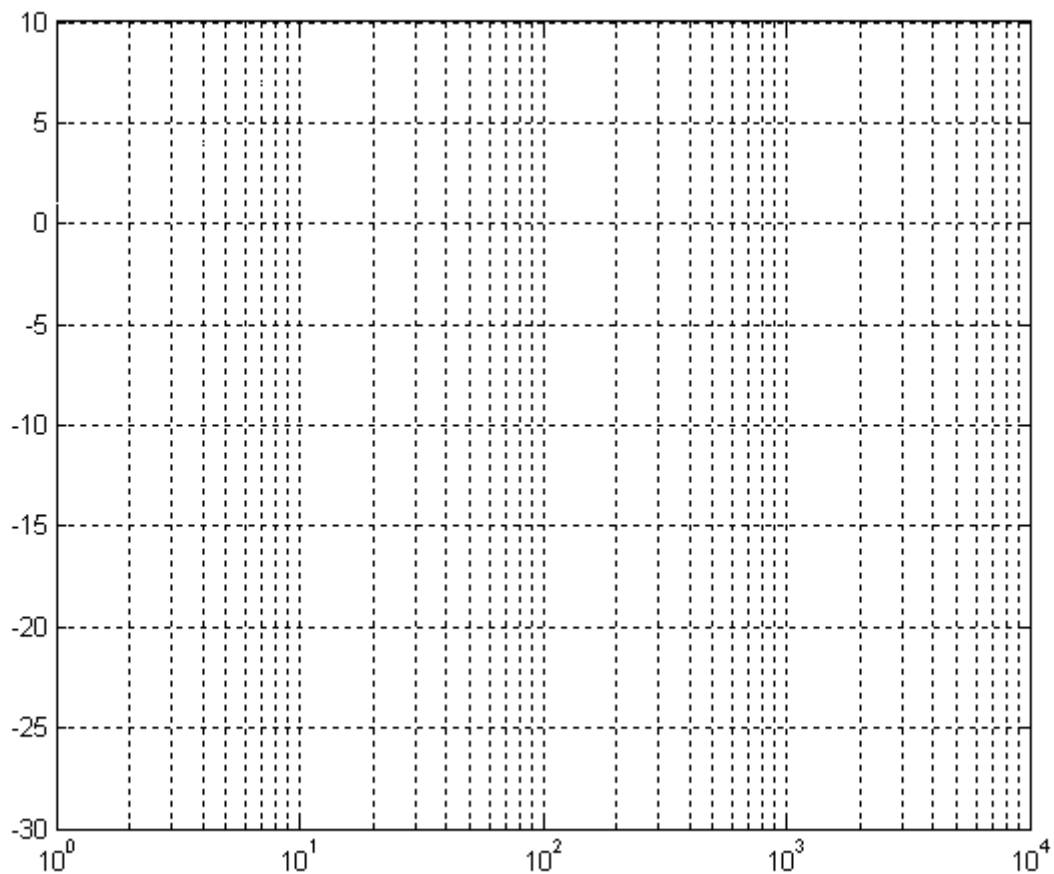
Ainsi la fréquence de coupure correspond à la fréquence pour laquelle le gain de la fonction de transfert

$$G_V = G_0 - 3dB$$

Définition :

Les deux courbes  $G_V(\omega) = f_1(\omega)$  et  $\varphi(\omega) = f_2(\omega)$  constituent le diagramme de Bode du filtre.

En abscisse, les fréquences ou pulsations  $\omega$  sont représentées sur une échelle logarithmique.



Nous allons voir dans le prochain paragraphe qu'il est possible de tracer très rapidement les courbes de réponse du module et la phase des fonctions de transfert sous forme de diagrammes asymptotiques.

Ces diagrammes s'appliquent très rapidement sur des fonctions simples (intégrateur pur, circuit du premier et du second ordre ...) mais aussi sur des fonctions quelconques à condition de les décomposer en fonctions simples.

Les droites asymptotiques s'obtiennent facilement en faisant tendre  $\omega$  vers 0 et vers l'infini.

### 7.3 Fonctions de transfert de base

#### 7.3.1 Intégrateur

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

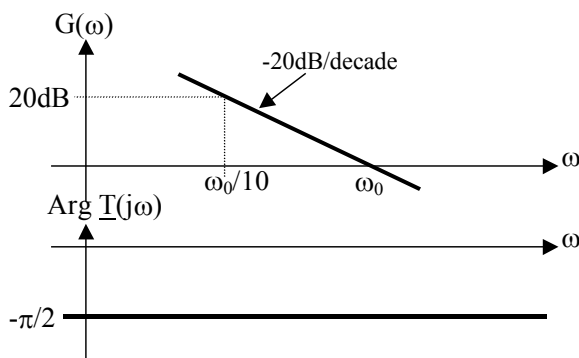
$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad G(\omega) = 20 \log_{10} \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega = \omega_0$ , nous avons le gain  $G(\omega_0) = 0$

Lorsque  $\omega = \omega_0 / 10$ , nous avons  $G\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = 20 \log_{10} 10 = +20 \text{ dB}$ .

Lorsque  $\omega = 10\omega_0$ , nous avons  $G(10\omega_0) = 20 \log_{10} (-10) = -20 \text{ dB}$ .

Ainsi, le gain  $G(\omega)$  décroît en fonction de la pulsation avec une pente -20dB/décade



#### 7.3.2 Dérivateur

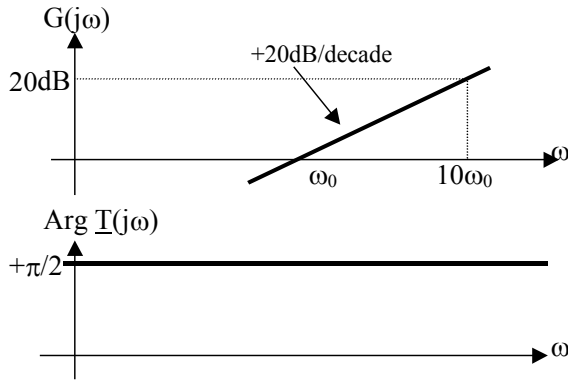
$$\underline{T}(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad G(\omega) = 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = +\frac{\pi}{2}$$

Le gain  $G(\omega)$  est égal à 0 lorsque  $\omega = \omega_0$

Le gain  $G(\omega)$  est égal à +20dB lorsque  $\omega = 10\omega_0$

Le gain  $G(\omega)$  croît en fonction de la pulsation avec une pente +20dB/décade



### 7.3.3 Intégrateur réel ou filtre passe bas du premier ordre

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad G(\omega) = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = -\text{Arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 \text{ est la pulsation de coupure à } -3\text{dB}, G(\omega_0) = -3\text{dB} \Leftrightarrow |\underline{T}(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \quad \varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$$

Cherchons à déterminer les deux asymptotes aux courbes  $G(\omega) = f_1(\omega)$  et  $\varphi(\omega) = f_2(\omega)$  :

Pour  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx -j \frac{\omega_0}{\omega}$$

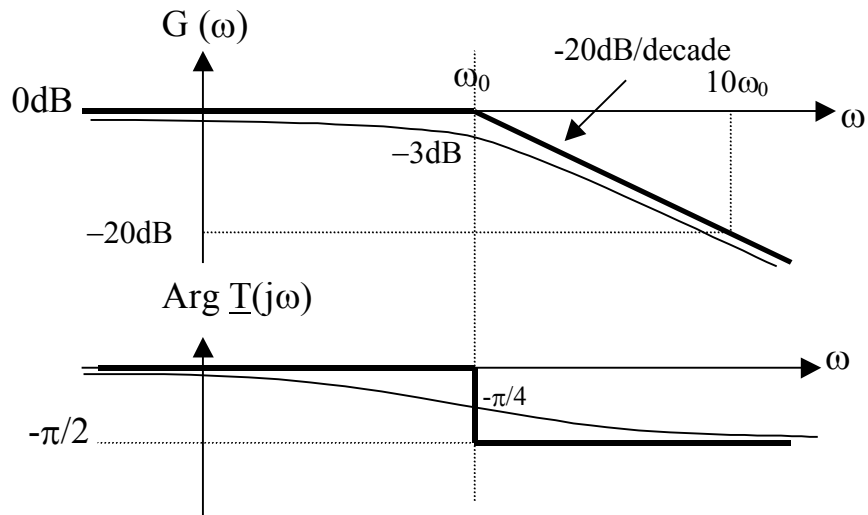
$G(\omega) \approx +20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$  Cette droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de -

20dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$ .

Pour  $\omega \ll \omega_0$

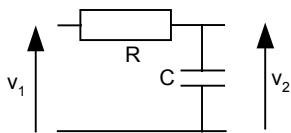
$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$



Donnons deux exemples de filtres passe-bas du premier ordre.

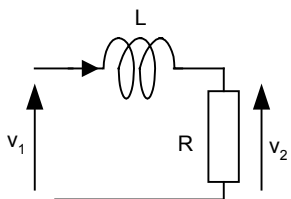
Exemple 1 :circuit RC



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  on retrouve bien la forme d'un filtre passe bas de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

Exemple 2 :circuit LR



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  on obtient un filtre passe bas de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

### 7.3.4 Dérivateur réel

$$\underline{T}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad G(\omega) = +20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = + \text{Arc} \tan \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 \text{ est la pulsation lorsque } G(\omega_0) = +3\text{dB} \Leftrightarrow |\underline{T}(j\omega_0)| = \sqrt{2} \quad \varphi(\omega_0) = +\frac{\pi}{4}$$

Déterminons les droites asymptotiques :

Pour  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx +j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$G(\omega) \approx +20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ . Cette droite asymptotique croît en fonction de la pulsation avec une pente de

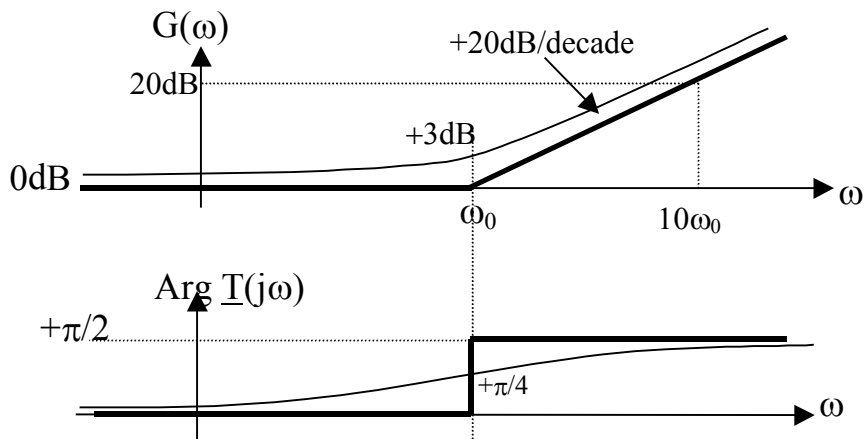
+20dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$ .

$$\varphi(\omega) \approx +\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$



Remarque : comme la fonction de transfert  $\underline{T}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$  est l'inverse de la fonction de transfert du filtre passe bas du premier ordre, on a  $G(\omega) = -G_{\text{PASSE-BAS}}(\omega)$ ,  $\varphi(\omega) = -\varphi_{\text{PASSE-BAS}}(\omega)$

### 7.3.5 Filtre passe-haut du premier ordre

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad G(\omega) = +20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 \text{ est la pulsation de coupure lorsque } G(\omega_0) = -3\text{dB} \Leftrightarrow |\underline{T}(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi(\omega_0) = +\frac{\pi}{4}$$

Pour tracer les asymptotes :

Pour  $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx +j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$G(\omega) \approx +20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$  . La droite asymptotique croît en fonction de la pulsation avec une pente de

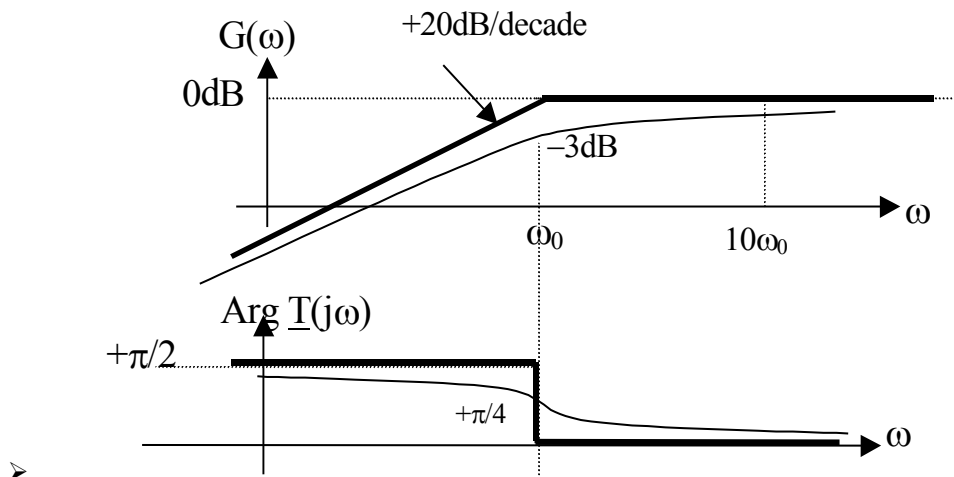
+20dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$  .

$$\varphi(\omega) \approx +\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$



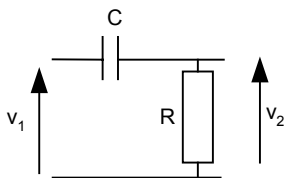
Remarque : comme la fonction de transfert  $\underline{T}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$  est le produit des fonctions de transfert d'un

dérivateur parfait et d'un filtre passe bas, on a :

$$G(\omega) = G_{\text{DERIVATEUR}}(\omega) + G_{\text{PASSE-BAS}}(\omega), \varphi(\omega) = \varphi_{\text{DERIVATEUR}}(\omega) + \varphi_{\text{PASSE-BAS}}(\omega)$$

Donnons deux exemples de filtres passe-haut du premier ordre.

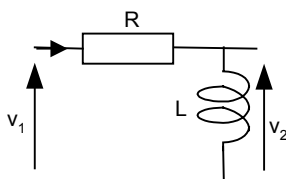
Exemple 1 : circuit CR



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  on retrouve bien la forme d'un filtre passe haut de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

Exemple 2 : circuit RL





$$\underline{T}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  on retrouve bien la forme d'un filtre passe haut de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

### 7.3.6 filtre passe bas du second ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe bas du second d'ordre s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

où  $\xi$  est appelé le facteur d'amortissement du filtre. Le module et la phase de  $\underline{T}(j\omega)$  s'écrivent :

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = -\text{Arc tan} \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{Donc le gain } G(\omega) = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Lorsque  $\omega = \omega_0$ , on a :

$$G(\omega_0) = -20 \log 2\xi$$

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

Nous allons maintenant étudier le gain et la phase de cette fonction de transfert en fonction de  $\xi$ .

Premier cas :  $\xi > 1$

La fonction de transfert peut se décomposer en un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} = \underline{T}_1(j\omega).\underline{T}_2(j\omega)$$

En développant le dénominateur, on obtient les égalités suivantes :

$$1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + j \left( \frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2} \right) - \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \\ 2\xi \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \end{cases}$$

$\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les solutions de l'équation du second ordre  $\omega^2 - S\omega + P = 0$  avec  $S = \omega_1 + \omega_2$  et  $P = \omega_1 \omega_2$

Soit  $\omega^2 - 2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2 = 0$

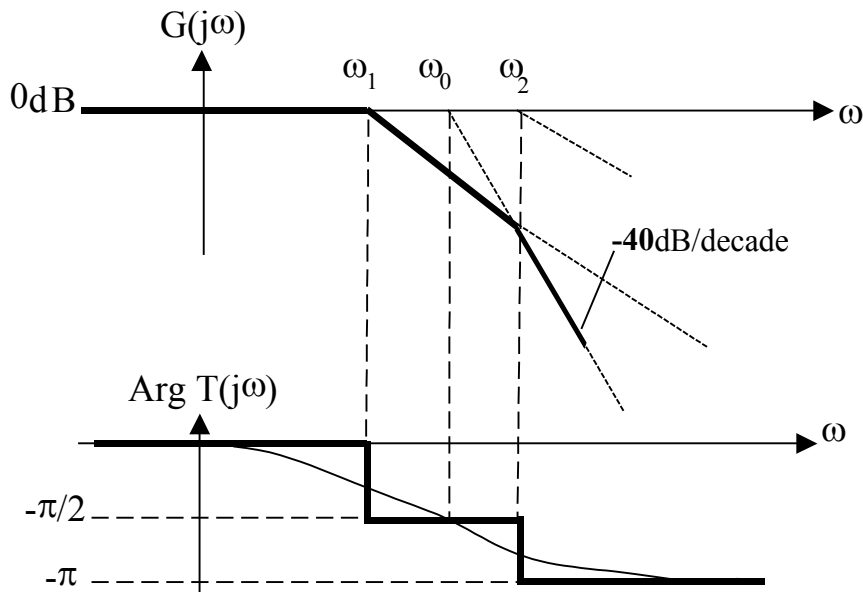
On obtient :

$$\omega_1 = \omega_0 \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

Nous pouvons tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert à partir des diagrammes de Bode des deux fonctions élémentaires. On a :

$$G(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$



Second cas :  $\xi = 1$

Ici, nous avons  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

La fonction de transfert devient :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

$$G(\omega_0) = -20 \log_{10} 2 = -6 \text{ dB}$$

Etudions les droites asymptotiques du gain  $G(\omega)$  et de la phase  $\varphi(\omega)$

Lorsque  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx \frac{1}{\omega^2} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$G(\omega) \approx -40 \log \frac{\omega_0}{\omega}$$

La droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de  $-40\text{dB/décade}$ . Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$ .

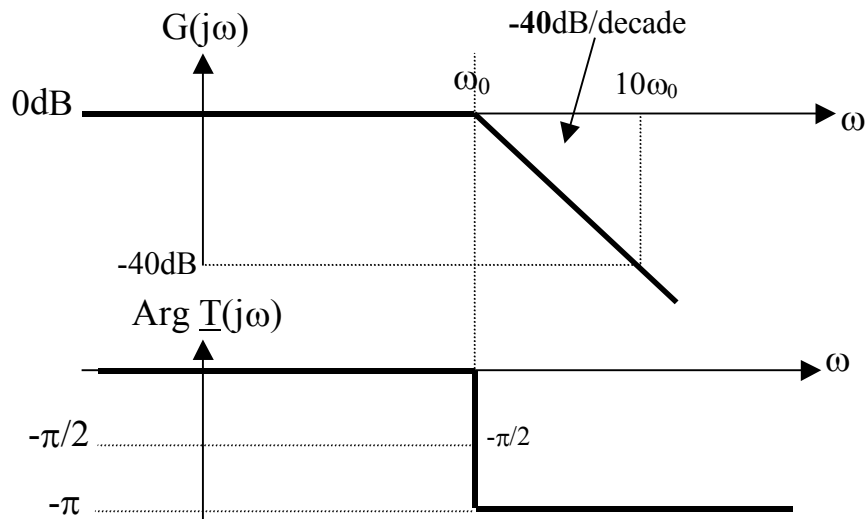
$$\varphi(\omega) \approx -\pi$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$

Ainsi nous pouvons tracer les droites asymptotiques du filtre passe-bas du second ordre pour  $\xi = 1$  (ces droites sont aussi valables pour  $\xi < 1$ ):



Troisième cas :  $\xi < 1$

Dans ce cas, les droites asymptotiques sont les mêmes que celles tracées ci-dessus.

Cependant, la décomposition en produit de fonctions élémentaires du premier ordre n'est plus possible car elle impliquerait des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  complexes.

Etudions le module de la fonction de transfert :

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

en posant  $D = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$

$|T(j\omega)|$  passe par un maximum lorsque  $\frac{dD}{d\omega} = 0$

$$\frac{dD}{d\omega} = 2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right) + 8\xi^2 \frac{\omega}{\omega_0^2} = 0$$

$$\frac{dD}{d\omega} = \left(\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right)\left(\frac{2\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + 4\xi^2\right) = 0$$

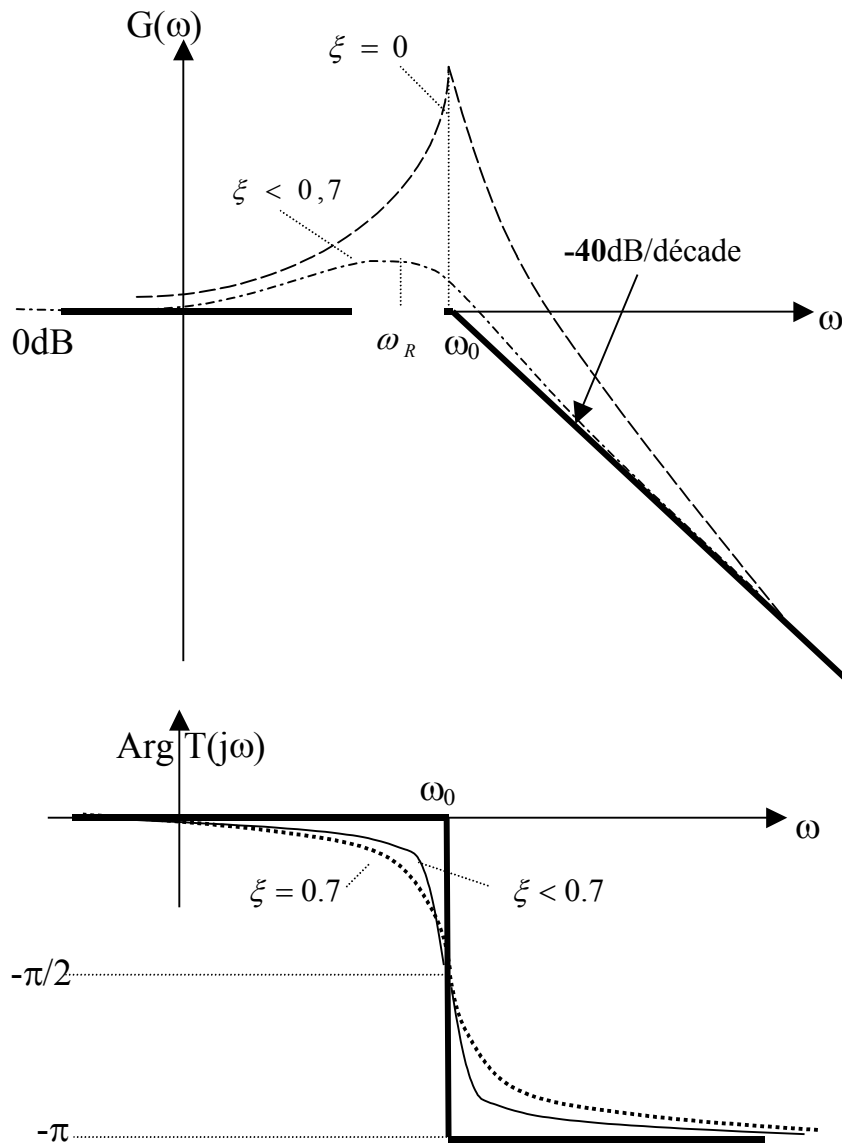
$$\omega_r^2 = (1 - 2\xi^2)\omega_0^2$$

La pulsation de résonance  $\omega_r$  à laquelle le module de la fonction de transfert passe par un maximum existe si et seulement si  $1 - 2\xi^2 > 0$  c'est à dire si  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Déterminons la valeur du module de la fonction de transfert à la pulsation de résonance  $\omega_r$  :

$$|T(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

L'allure des courbes  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\omega$  est la suivante :



### 7.3.7 Fonctions de transfert quelconques

On peut toujours tracer les diagrammes de Bode  $G(\omega) = f_1(\omega)$  et  $\varphi(\omega) = f_2(\omega)$  en mettant la fonction de transfert à étudier sous la forme :

$$T(j\omega) = \frac{\text{Produit de fonctions de base du premier et du second ordre}}{\text{Produit de fonctions de base du premier et second ordre}}$$

Exemple :

$$T(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)} = \frac{T_1(j\omega)}{T_2(j\omega).T_3(j\omega)}$$

Les diagrammes de Bode sont :

$$G(\omega) = G_1(\omega) - G_2(\omega) - G_3(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) - \varphi_3(\omega)$$

Si on a dans l'ordre  $\omega_0 < \omega_2 < \omega_1$  on peut tracer très vite les droites asymptotiques avec cette méthode simple :

On part d'une pulsation nulle  $\omega = 0$  et on applique les pentes correspondant aux fonctions intégrateur ou dérivateur. Puis en augmentant  $\omega$  si on rencontre une pulsation  $\omega_k$  dans une fonction de base du premier ou du deuxième ordre, au numérateur ou au dénominateur, on modifie la pente du module de 20 ou 40dB/décade, en plus ou en moins, et la phase de  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\pi$  en plus ou en moins.

